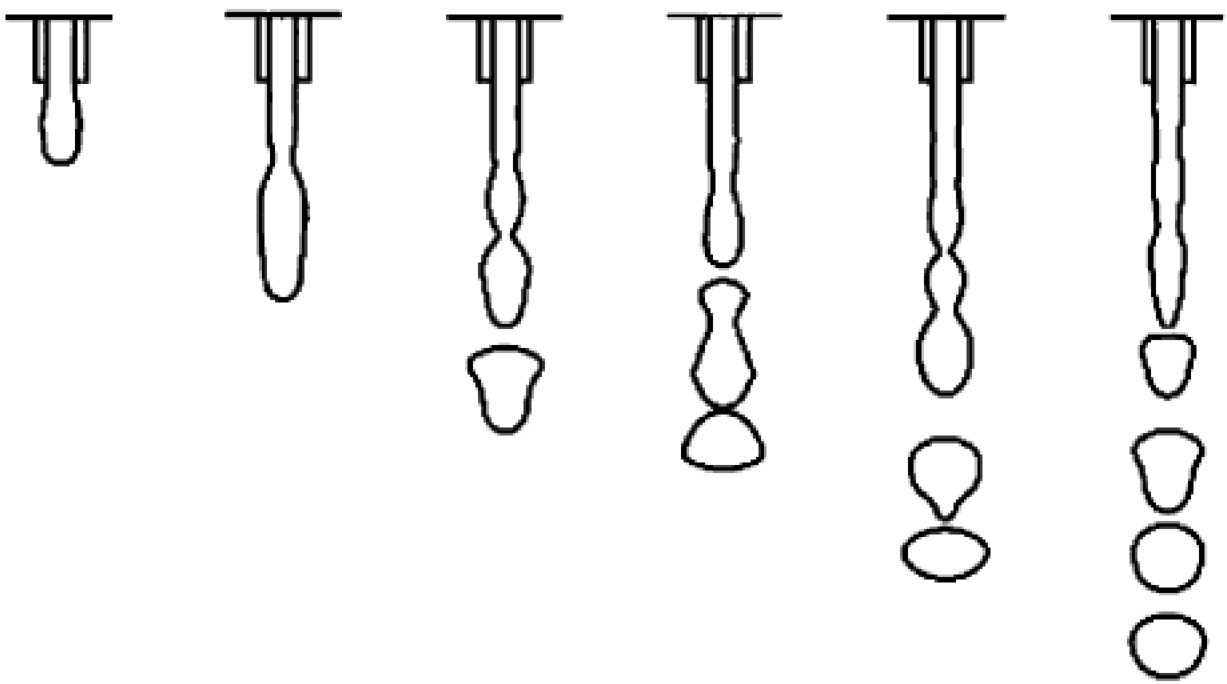
# 工業反応装置特論

講義時間：水曜/木曜6限
場所　　：8-1A
担当　　：山村

# 液体柱が自発的に分裂するのは何故か



Homma et al., Chemical Engineering Science 61 (2006) 3986-3996

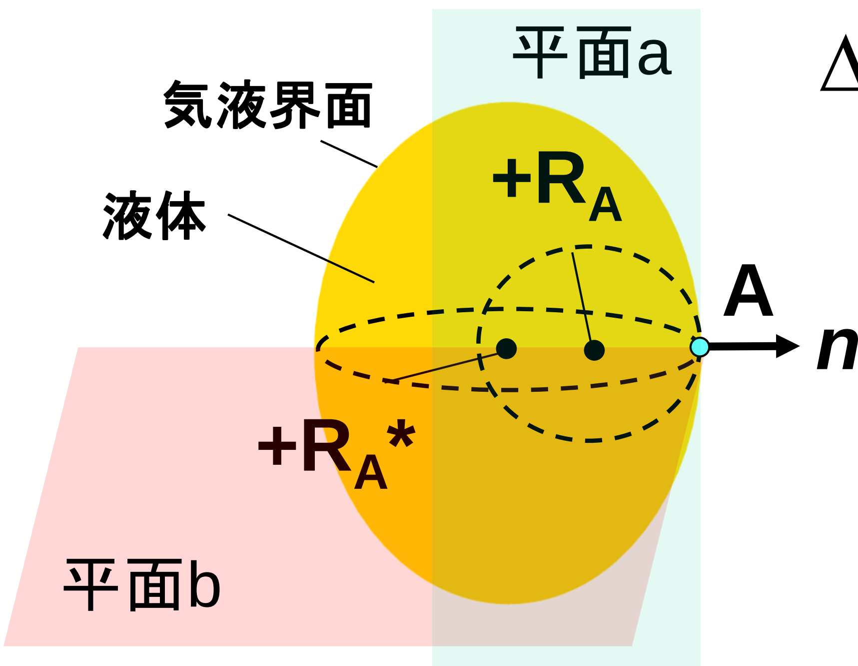
応用例:
- インクジェット印刷
- 冷却用ミスト
- 衛生陶器釉薬のスプレー塗装

# 3つのルール

I. 界面上の任意の点Aについて、点Aを通る法線ベクトル*n*をとる。ベクトル*n*を含み且つ互いに直交する2つの平面上に、界面に沿った円を描く

II. 円の中心が液体内部にあるときは曲率半径の符号を正に、外部にあるときは負に取る

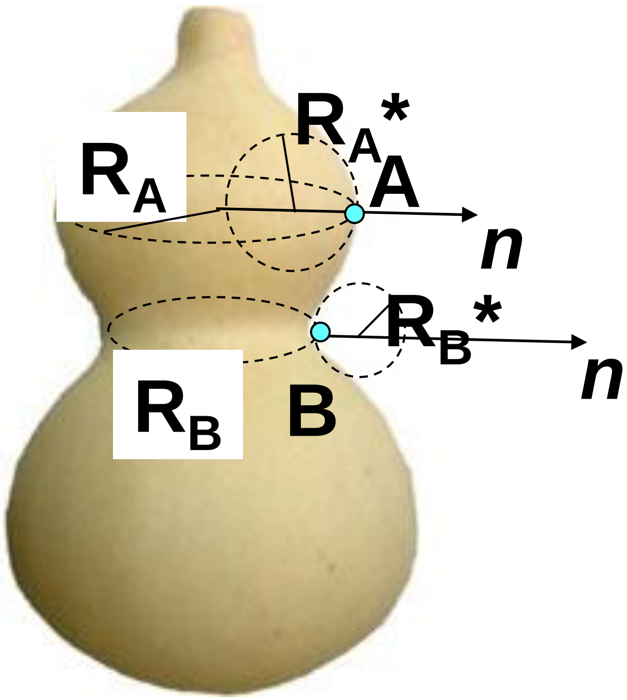
III. 液体内外の圧力差は正の物性定数σを用いて次式で表される（ラプラスの定理, Laplace 1805)




$$\Delta p = \sigma\left( + \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_A^{\ *}} \right)$$

ただし符号は左図の場合

# くびれを持つ液柱




www.yumegazai.com

点A $\Delta p_A = \sigma\left(\dfrac{1}{R_A} + \dfrac{1}{R_A{}^*}\right)$

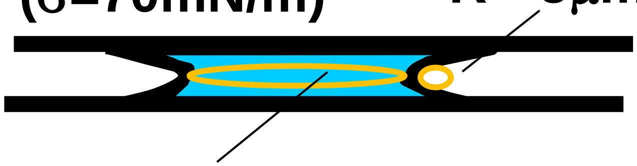
点B $\Delta p_B = \sigma\left(\dfrac{1}{R_B} - \dfrac{1}{R_B{}^*}\right)$

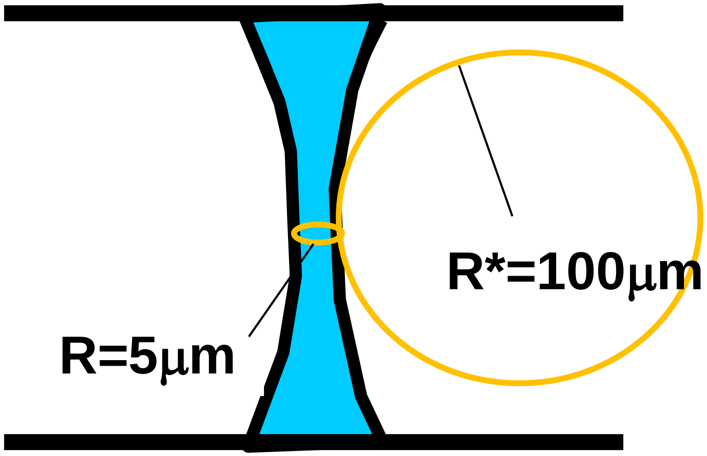
Q1. 液体外の圧力が一定の場合
$\Delta p_A < \Delta p_B$となる条件は何か？

Q2. $\Delta p_A < \Delta p_B$が成り立つ場合
液柱はどのように変形するか？

a. 球に近づく　b. 分裂する　c. 円柱に近づく

# 2枚の平板に挟まれた液柱




$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R^*}\right)$$

$$= (70\times10^{-3})\left(\frac{1}{100\times10^{-6}} - \frac{1}{5\times10^{-6}}\right)$$

$$= -13\mathrm{kPa}$$

$$\Delta p = 13\mathrm{kPa}$$

**負圧（平板を吸い寄せる力）**

**正圧（分裂の駆動力）**

**（注）合一も分裂も生じない安定な液柱形状が存在**

# 任意の自由表面形状における毛管圧

$x$方向のみに液体厚み$h(x)$が変化する場合を考える。

毛管圧力は気液界面の曲率$1/r$を用いて次式で定義する。

$$\Delta p \equiv -\sigma / r \qquad (1)$$

自由表面の曲率$r$は幾何学から

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2h/dx^2}{\left\{1+(dh/dx)^2\right\}^{3/2}} \qquad (2)$$

(1)(2)を組み合わせると

$$\Delta p = -\sigma \frac{d^2h/dx^2}{\left\{1+(dh/dx)^2\right\}^{3/2}}$$

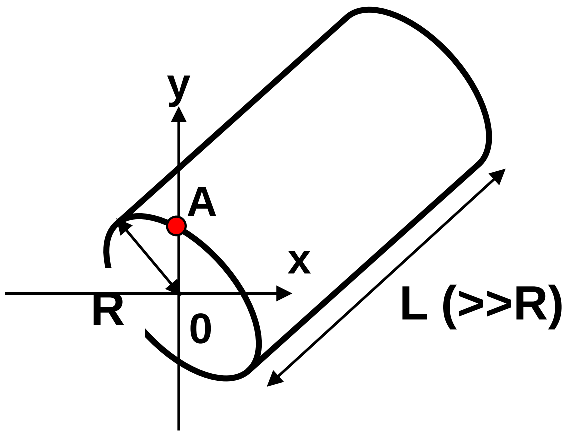
$x$方向の液体の広がりに対して膜厚の変化が十分

小さな場合は$\dfrac{dh}{dx} << 1$が成り立つので、分母第2項は無視小で

$$\Delta p = -\sigma \frac{d^2h}{dx^2}$$

# 円柱に働く毛管圧

**表面が円柱形状の場合**




円柱表面の座標は次式で表される。

$$h(=y)=\sqrt{R^2-x^2}$$

微分すると

$$\frac{dh}{dx}=-\frac{x}{(R^2-x^2)^{1/2}}$$

$$\frac{d^2h}{dx^2}=-\frac{R^2}{(R^2-x^2)^{3/2}}$$

従って毛管圧力は

$$\Delta p=-\sigma\frac{d^2h}{dx^2}=\frac{\sigma R^2}{(R^2-x^2)^{3/2}}$$

円柱中央での圧力は$x=0$を代入して

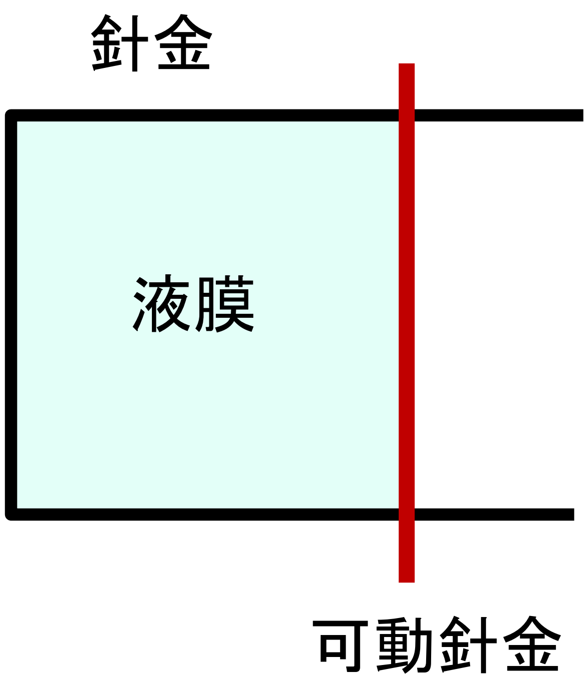
$$\Delta p=\frac{\sigma R^2}{R^3}=\frac{\sigma}{R}$$

# 静的表面張力(σ)

純水(25℃)　σ=72 mN/m = 72 mJ/m$^2$　（理科年表より）

単位長さ当たりに作用する力
単位面積当たりのエネルギー(表面エネルギー)

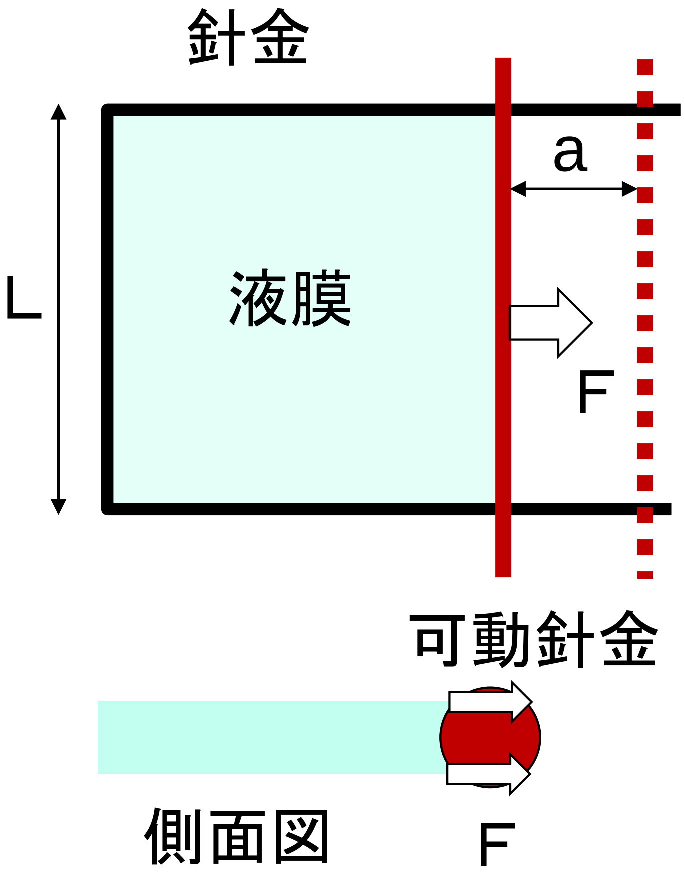
Maxwellの実験




$F=\sigma L$

https://www.fia-sims.com/p40-interface-science.html

# エネルギーとしての表面張力




液膜の上下面がそれぞれ可動針金に接している。表面張力$\sigma$を単位面積当たりのエネルギーと考えると

針金を距離$a$だけ動かすのに必要な仕事は

$$W = \sigma \times 2aL \quad [J/m^2][m^2] = [J]$$

仕事は力の距離の積で与えられるので

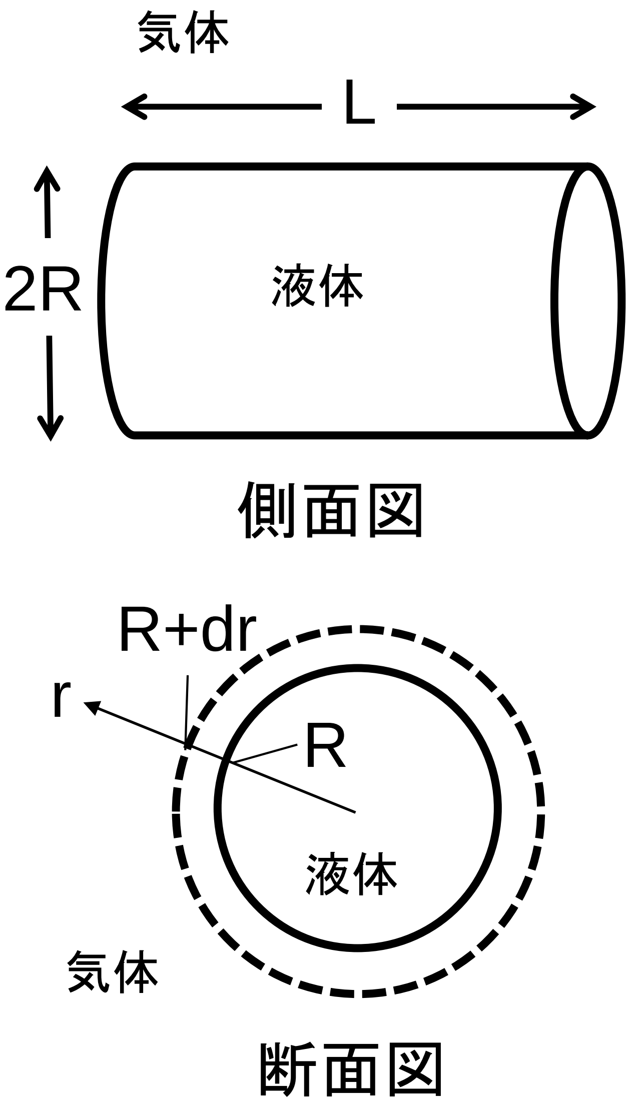
可動針金に作用する力は

$$W = Fa$$

$$\therefore F = 2 \times \sigma L \quad [N]$$

従って$\sigma$は単位長さ当たりに作用する力に相当

# 円柱に働く毛管圧（別解）




気体中にある半径$R$、長さ$L$の液相円柱を考える。
気相と液相の界面には表面張力$\sigma$が作用している。
円柱の半径が$dr$だけ広がるとき、円柱表面積は

$$dA = 2\pi(R + dr)L - 2\pi RL = 2\pi Ldr$$

だけ増加するので、必要な仕事は

$$dW = \sigma dA = 2\pi\sigma Ldr$$

この仕事をするために作用する力は

$$dW = Fdr$$

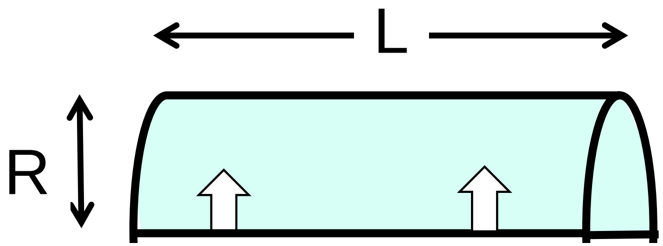
$$\therefore F = 2\pi\sigma L$$

円柱内の液相の圧力を$p_{in}$、円柱外の気体の圧力を$p_{out}$
とすると、円柱外から作用する力は円柱表面積$2\pi RL$と
$p_{out}$の積と$F$の和であるので、平衡状態での力の釣り合いより

$$2\pi RLp_{out} + 2\pi\sigma L = 2\pi RLp_{in}$$

$$\therefore p_{in} - p_{out} = \frac{\sigma}{R}$$

# 半円柱に働く毛管圧（別解）




半径Rの液柱

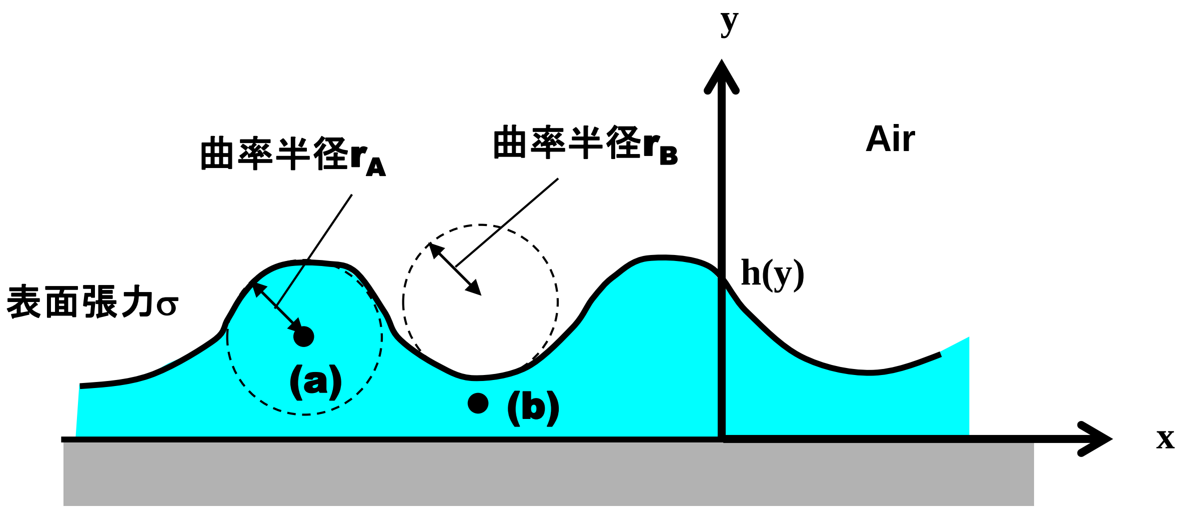
液体の半円柱の底面（面積2LR）の上下における圧力差をΔpとする

定常状態と仮定すると
液滴底面に働く力の釣り合いより

$$\sigma \times 2L = \Delta p \times 2LR$$

$$\therefore \Delta p = \frac{\sigma}{R}$$

# 2次元凹凸を持つ液体膜




$$\text{点A では} \; d^2h/dx^2 < 0 \quad \therefore \Delta p_A = -\left(-\frac{\sigma}{R_A}\right) = \frac{\sigma}{R_A}(>0)$$

$$\text{点}B\text{では} \; d^2h/dx^2 > 0 \quad \therefore \Delta p_B = -\left(\frac{\sigma}{R_B}\right) = -\frac{\sigma}{R_B}(<0)$$

圧力差による流れによって、液体表面の凹凸は自発的に減衰
（levelingと呼ばれる現象）

# 球に働く表面張力

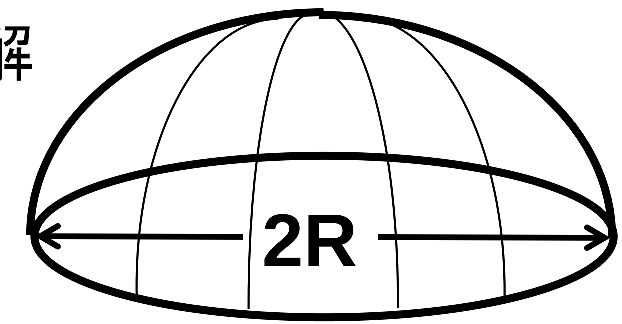
一般的な3次元物体であれば、曲率半径の異なるR, R*を用いて

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R^*}\right)$$

（例）半径Rの球

$$R = R^* \text{を代入すれば} \Delta p = \frac{2\sigma}{R}$$

（例）別解



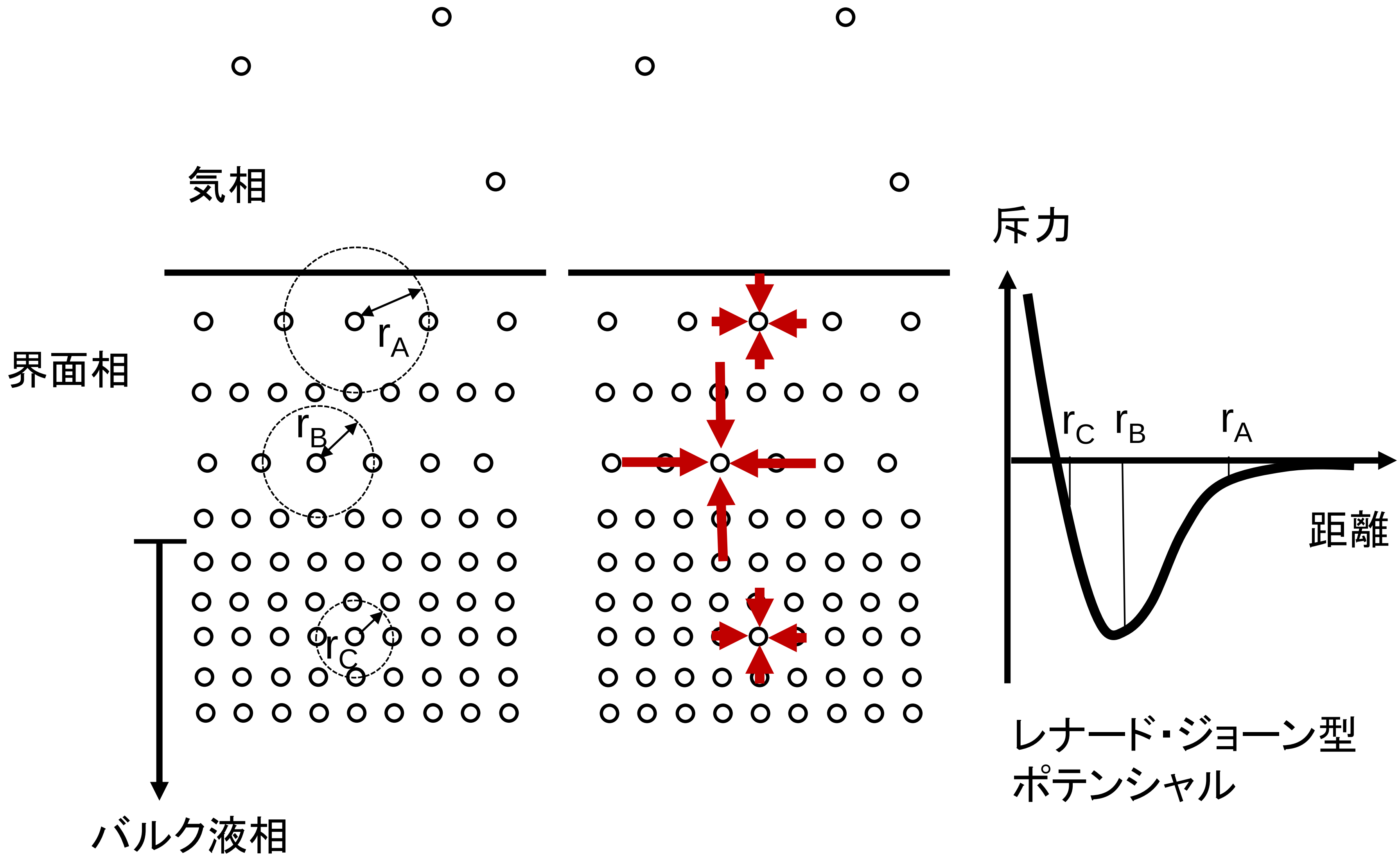

液滴底面（面積πR$_2$）の上下における圧力差をΔpとする

定常状態と仮定すると
液滴底面に働く力の釣り合いより

$$\sigma \times 2\pi R = \Delta p \times \pi R^2$$

$$\therefore \Delta p = \frac{2\sigma}{R}$$

# 表面張力の起源:密度分布



## Report 3 capillary pressure (毛管圧）

氏名

半径Rの球状液滴がある。液体の表面張力をσ[N/m]とする。
[問1]この液滴の半径をdr増加させると、表面積は$4\pi(R+dr)^2-4\pi R^2$だけ増加する。この操作に必要な仕事が$8\pi\sigma R dr$で表されることを示せ。ただし微小量drの2乗以上の項は無視小としてよい。
[問2]この仕事をするのに必要な力(F)が$F=8\pi\sigma R$で表されることを示せ。
[問3]液滴内部の圧力を$p_{in}$, 外部の圧力を$p_{out}$とすると、平衡状態における毛管圧力$\Delta p= p_{in}- p_{out}$について次式が成り立つことを示せ。

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R} \quad (1)$$

[問4]異なる半径$R_A$、$R_B$を持つ液滴Aと液滴Bが接すると、2つの液滴間の流れが生じ、一方の液滴は成長するが、他方の液滴はやがて消滅する。この現象を毛管圧（ラプラス圧）を用いて説明せよ。