工業反応装置特論

講義時間：水曜/木曜6限
場所　　：8-1A
担当　　：山村

湾曲した界面での応力バランス(1)法線方向

$$\tau_{n,A} + p_A = \tau_{n,B} + p_B - \sigma \frac{d^2 h_A / dx^2}{\left\{1 + (dh_A / dx)^2\right\}^{3/2}}$$

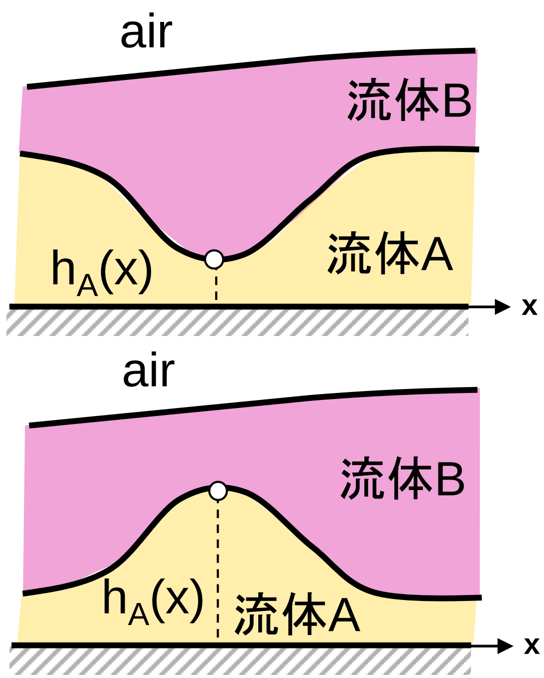
$\tau_{n,i}$は界面に垂直な方向（法線方向）の流体iの応力成分

$$dh_A / dx << 1 \text{なら} \; \tau_{n,A} + p_A = \tau_{n,B} + p_B - \sigma \frac{d h_A^2}{dx^2}$$

特別な場合(I)：静止した積層液体

case I

case II



静止した流体内で運動量移動はない

(せん断応力は作用しない）ので

$\tau_{n,A} \approx 0, \tau_{n,B} \approx 0$

$$\therefore p_A = p_B - \sigma \frac{d h_A^2}{dx^2}$$

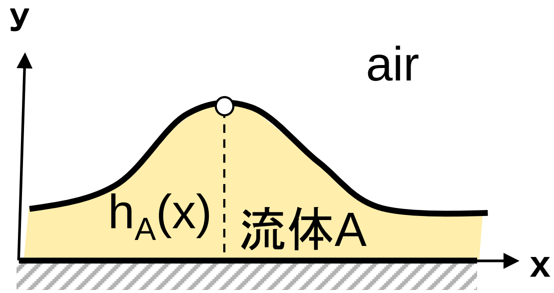
Q. case I, IIで圧力の高い流体は
それぞれどれか

湾曲した界面での応力バランス（2）接線方向

$$\tau_{t,A} = \tau_{t,B}$$

$\tau_{t,i}$は界面に沿った方向（接線方向）の流体iの応力成分

特別な場合(II): 流体B内のせん断応力（運動量）が無視小



$\tau_{t,B} \approx 0$なので

$$\tau_{t,A} = 0$$

流体Aがx方向のみの速度成分u_Aを持つ場合

$$\tau_{t,A} = \tau_{yx,A}$$

Newton流体なら粘度をμ_Aとすれば

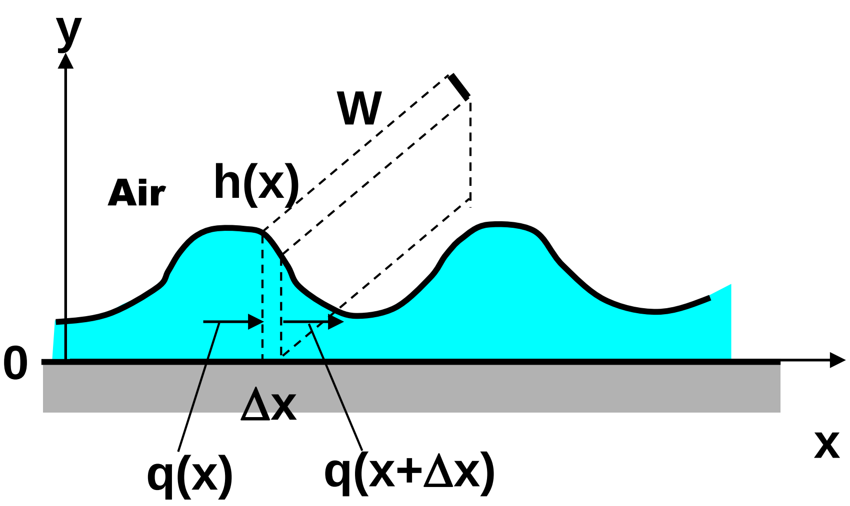
$$\tau_{yx,A} = -\mu_A \frac{du_A}{dy}$$

従って界面での境界条件は

$$-\mu_A \frac{du_A}{dy} = 0$$

FILM PROFILE EQUATION (FPE)の導出 (1)
膜厚の時間変化を表現する方法

静止平板上に塗布された
周期的な表面凹凸を持つ液体



仮定

- 重力は無視小
- 流れはx方向で潤滑理論が成り立つ
- Newton流体

時刻tにおけるシェル内の体積は$(hW\Delta x)\big|_t$

Δt間の体積変化は$(hW\Delta x)\big|_{t+\Delta t}-(hW\Delta x)\big|_t$

qは単位幅あたりの流量なので

Δt間のxからの流入体積は$(qW)\big|_x\Delta t$

Δt間の$x+\Delta x$からの流出体積は$(qW)\big|_{x+\Delta x}\Delta t$

従ってシェルバランスから

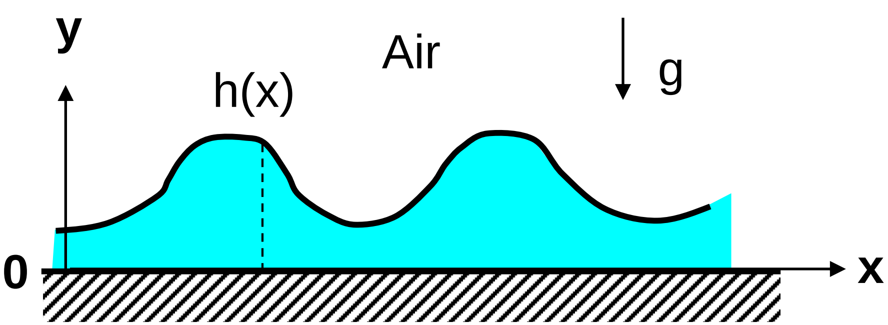
$$(hW\Delta x)\big|_{t+\Delta t}-(hW\Delta x)\big|_t=(qW)\big|_x\Delta t-(qW)\big|_{x+\Delta x}\Delta t$$

$\Delta t\to 0,\quad \Delta x\to 0$の極限をとれば

$$\frac{\partial h}{\partial t}=-\frac{\partial q}{\partial x}\qquad(1)$$

FILM PROFILE EQUATION の導出 (2)

静止平板上に塗布された
周期的な表面凹凸を持つ液体



x方向の速度分布は次式で表される

２次曲線

$$u=\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}y^2-\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}hy \quad (2)$$

(2)は次の境界条件を満たすことに注意

$$y=0:u=0 \quad (3)$$

$$y=h(x):\mu\partial u/\partial y=0 \quad (4)$$

積分すれば範囲幅当りの流量qは

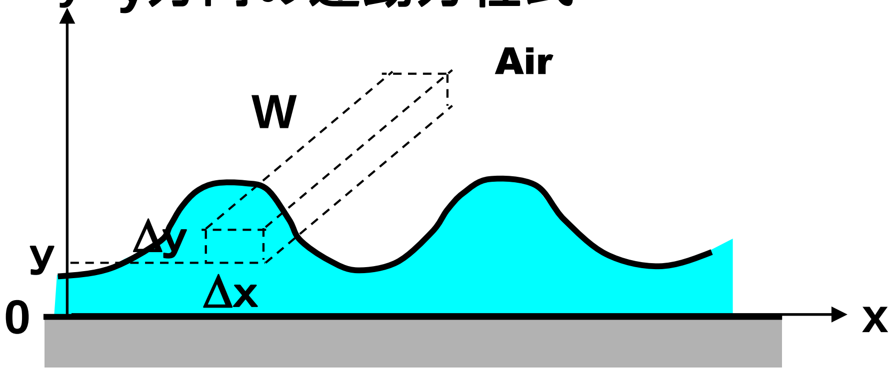
$$q\equiv\int_0^h u(y)dy=\int_0^h\left\{\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}y^2-\frac{h}{\mu}\frac{dp}{dx}y+C_2\right\}$$

$$=\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^h-\frac{h}{\mu}\frac{dp}{dx}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^h$$

$$=-\frac{h^3}{3\mu}\frac{dp}{dx} \quad (5)$$

FILM PROFILE EQUATION の導出 (3)

y方向の運動方程式



yにおけるシェル面積は$W\Delta x$なので

yにおいてシェルへ作用する圧力は$(W\Delta xp)\big|_y$

$y+\Delta y$においてシェルへ作用する圧力は$(W\Delta xp)\big|_{y+\Delta y}$

y方向の運動量収支から

$$0=(W\Delta xp)\big|_y-(W\Delta xp)\big|_{y+\Delta y}$$

シェル体積$W\Delta x\Delta y$で除すと

$$0=-\frac{p\big|_{y+\Delta y}-p\big|_y}{\Delta y}$$

$\Delta y\to 0$では$0=\dfrac{dp}{dy}\quad\therefore\ p=const.$

FILM PROFILE EQUATION の導出 (4)

応力バランス$\tau_{n,A} + p_A = \tau_{n,B} + p_B - \sigma \dfrac{d{h_A}^2}{dx^2}$において

y方向流れが存在しないので$\tau_{n,A} = \tau_{n,B} = 0$

大気圧を基準にとって$p_B = 0$とし、$p = p_A$と書き直すと

$$p = -\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} \quad (6)$$

(6)を(5)に代入すれば

$$q = -\frac{h^3}{3\mu} \frac{d}{dx}\left(-\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} \right) \quad (7)$$

(7)を(1)に代入すれば

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{ -\frac{h^3}{3\mu} \frac{d}{dx}\left(-\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} \right) \right\} \quad (8)$$

従って(8)を解けば、任意の時刻における

液体表面形状が求められる。

FILM PROFILE EQUATION の導出 (5) 無次元化

代表長さをh_0,代表速度をU_0とおくと

代表時間はh_0/U_0で表される。これらを

用いて次の無次元座標と無次元時間を考える。

$$x^* \equiv x/h_o$$

$$h^* \equiv h/h_o$$

$$t^* \equiv t/(h_o/U_o)$$

これらより

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial(h^* h_0)}{\partial(t^* h_o/U_0)} = U_0 \frac{\partial h^*}{\partial t^*}$$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{d(h^* h_0)}{d(x^* h_0)} = \frac{dh^*}{dx^*}$$

$$\frac{d^2 h}{dx^2} = \frac{d}{d(x^* h_0)} \frac{dh^*}{dx^*} = \frac{1}{h_0} \frac{d^2 h^*}{dx^{*2}}$$

FILM PROFILE EQUATION の導出 (6) 無次元化

(8)式に代入すれば

$$U_0 \frac{\partial h^*}{\partial t^*} = -\frac{\partial}{\partial (x^* h_0)} \left\{ -\frac{(h^* h_0)^3}{3\mu} \frac{d}{d(x^* h_0)} \left(-\sigma \frac{1}{h_0} \frac{d^2 h^*}{dx^{*2}} \right) \right\}$$

$$\therefore \frac{\partial h^*}{\partial t^*} = -\frac{1}{3} \left(\frac{\mu U_0}{\sigma} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x^*} \left(h^{*3} \frac{d^3 h^*}{dx^{*3}} \right)$$

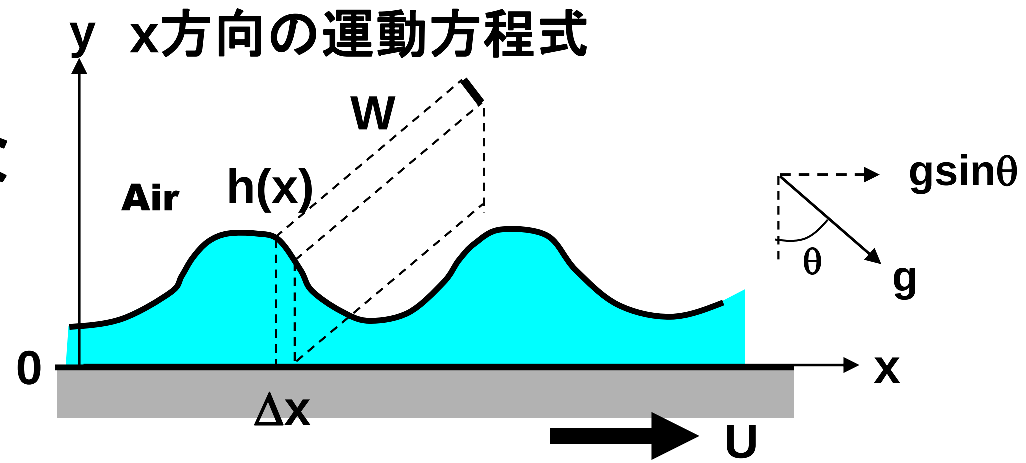
ここで現れる$\dfrac{\mu U_0}{\sigma}$はキャピラリ数(Ca)と呼ばれる無次元数。

圧力の単位で表した粘性力（せん断応力、運動量）$\mu U_0 / h_0$と毛管力σ / h_0の比となる。

$Ca \sim 1$ならこれら２つの力は等しい

FILM PROFILE EQUATION の導出 (7)

より一般的な場合



yにおけるシェル面積は$W\Delta x$なので

単位時間にyからシェル内へ流入するx方向の運動量は$(\tau_{yx}W\Delta x)\big|_{y}$

同様に$y+\Delta y$からシェル外へ流出するx方向の運動量は$(\tau_{yx}W\Delta x)\big|_{y+\Delta y}$

xにおけるシェル面積は$W\Delta y$なので

xにおいてシェルへ作用する圧力は$(W\Delta yp)\big|_{x}$

$x+\Delta x$においてシェルへ作用する圧力は$(W\Delta yp)\big|_{x+\Delta x}$

シェル体積は$W\Delta x\Delta y$なのでシェルに作用するx方向重力成分は$(W\Delta x\Delta y)\rho g\sin\theta$

従ってx方向の運動量収支から

$$0=(W\Delta yp)\big|_{x}-(W\Delta yp)\big|_{x+\Delta x}+(\tau_{yx}W\Delta x)\big|_{y}-(\tau_{yx}W\Delta x)\big|_{y+\Delta y}+(W\Delta x\Delta y)\rho g\sin\theta$$

FILM PROFILE EQUATION の導出 (8)

シェル体積$W\Delta x\Delta y$で除すと

$$0 = -\frac{p|_{x+\Delta x} - p|_x}{\Delta x} - \frac{\tau_{yx}|_{y+\Delta y} - \tau_{yx}|_{y+\Delta y}}{\Delta y} + \rho g \sin\theta$$

$\Delta x \to 0, \quad \Delta y \to 0$では

$$0 = -\frac{dp}{dx} - \frac{d\tau_{yx}}{dy} + \rho g \sin\theta$$

ニュートン流体ならば$\tau_{yx} = -\mu \dfrac{du}{dy}$であるから

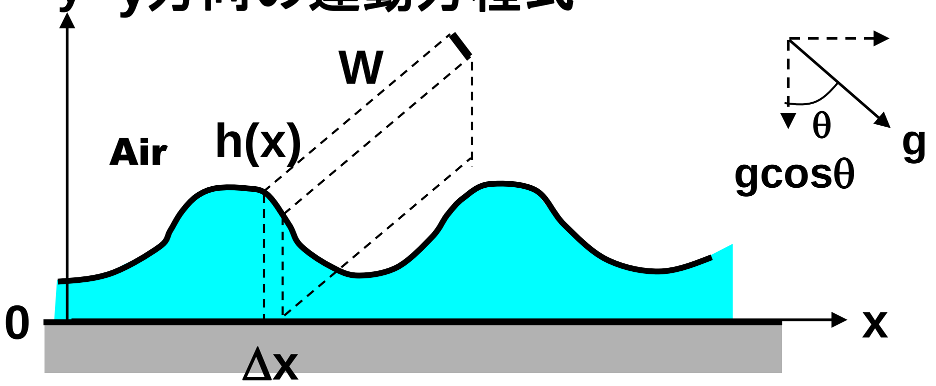
$$0 = -\frac{dp}{dx} + \frac{d}{dy}\left(\mu \frac{du}{dy}\right) + \rho g \sin\theta$$

ニュートン流体ならばμは一定なので

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2} + \rho g \sin\theta \quad (9)$$

FILM PROFILE EQUATION の導出 (9)

y方向の運動方程式



yにおけるシェル面積は$W\Delta x$なので

yにおいてシェルへ作用する圧力は$(W\Delta xp)\big|_y$

$y+\Delta y$においてシェルへ作用する圧力は$(W\Delta xp)\big|_{y+\Delta y}$

シェル体積は$W\Delta x\Delta y$なのでシェルに作用するy方向重力成分は$(W\Delta x\Delta y)\rho g\cos\theta$

従ってx方向の運動量収支から

$$0=(W\Delta xp)\big|_y-(W\Delta xp)\big|_{y+\Delta y}-(W\Delta x\Delta y)\rho g\cos\theta$$

シェル体積$W\Delta x\Delta y$で除すと

$$0=-\frac{p\big|_{y+\Delta y}-p\big|_y}{\Delta y}-\rho g\cos\theta$$

$\Delta y\to 0$では

$$0=-\frac{dp}{dy}-\rho g\cos\theta \quad (10)$$

FILM PROFILE EQUATION の導出 (10)

(10)を$y=0$〜hまで積分すると$y=0$における圧力pは

$$0=-(p(h)-p)-\rho gh\cos\theta \quad (11)$$

$y=h$（気液界面）での応力バランスから

$$p(h)=-\sigma\frac{d^2h/dx^2}{\left\{1+(dh/dx)^2\right\}^{3/2}}$$

$\dfrac{dh}{dx}<<1$なら簡単に

$$p(h)=-\sigma\frac{d^2h}{dx^2} \quad (12)$$

(12)を(11)に代入すると

$$p=-\sigma\frac{d^2h}{dx^2}+\rho gh\cos\theta \quad (13)$$

FILM PROFILE EQUATION の導出 (11)

(13)を(9)に代入すれば

$$0=-\frac{d}{dx}\left(-\sigma\frac{d^2h}{dx^2}+\rho gh\cos\theta\right)+\mu\frac{d^2u}{dy^2}+\rho g\sin\theta$$

整理すると

$$\mu\frac{d^2u}{dy^2}=\frac{d}{dx}\left(-\sigma\frac{d^2h}{dx^2}+\rho gh\cos\theta\right)-\rho g\sin\theta$$

1回積分して

$$\frac{du}{dy}=\frac{1}{\mu}\left[\frac{d}{dx}\left(-\sigma\frac{d^2h}{dx^2}+\rho gh\cos\theta\right)-\rho g\sin\theta\right]y+C_1$$

もう1回積分して

$$u=\frac{1}{2\mu}\left[\frac{d}{dx}\left(-\sigma\frac{d^2h}{dx^2}+\rho gh\cos\theta\right)-\rho g\sin\theta\right]y^2+C_1y+C_2$$

境界条件$y=0:u=U,\quad y=h(x):\partial u/\partial y=0$から

$$C_1=-\frac{1}{\mu}\left[\frac{d}{dx}\left(-\sigma\frac{d^2h}{dx^2}+\rho gh\cos\theta\right)-\rho g\sin\theta\right]h,\quad C_2=U$$

$$\therefore u=\frac{1}{2\mu}\left[\frac{d}{dx}\left(-\sigma\frac{d^2h}{dx^2}+\rho gh\cos\theta\right)-\rho g\sin\theta\right]y^2-\frac{1}{\mu}\left[\frac{d}{dx}\left(-\sigma\frac{d^2h}{dx^2}+\rho gh\cos\theta\right)-\rho g\sin\theta\right]hy+U \qquad (14)$$

FILM PROFILE EQUATION の導出 (12)

(14)を$y=0$から$h(x)$まで積分すると

単位長さ当たりの流量qは

$$q \equiv \int_0^h u(y)dy$$

$$= \frac{1}{2\mu}\left[\frac{d}{dx}\left(-\sigma\frac{d^2h}{dx^2}+\rho g h\cos\theta\right)-\rho g\sin\theta\right]\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h - \frac{h}{\mu}\left[\frac{d}{dx}\left(-\sigma\frac{d^2h}{dx^2}+\rho g h\cos\theta\right)-\rho g\sin\theta\right]\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h + Uh$$

$$= \frac{h^3}{6\mu}\left[\frac{d}{dx}\left(-\sigma\frac{d^2h}{dx^2}+\rho g h\cos\theta\right)-\rho g\sin\theta\right] - \frac{h^3}{2\mu}\left[\frac{d}{dx}\left(-\sigma\frac{d^2h}{dx^2}+\rho g h\cos\theta\right)-\rho g\sin\theta\right] + Uh$$

$$= -\frac{h^3}{3\mu}\left[\frac{d}{dx}\left(-\sigma\frac{d^2h}{dx^2}+\rho g h\cos\theta\right)-\rho g\sin\theta\right] + Uh$$

整理すると

$$\frac{3\mu}{h^3}q = \frac{d}{dx}\left(\sigma\frac{d^2h}{dx^2}-\rho g h\cos\theta\right)+\rho g\sin\theta+\frac{3\mu}{h^2}U \quad (15)$$

与えられた流量qでhに関するこの微分方程式を解けば
定常状態における表面形状が算出できる

FILM PROFILE EQUATION の導出 (13)

平均膜厚h_0を用いて次のように無次元化

$$x^* \equiv x / h_o$$

$$h^* \equiv h / h_o$$

(15)を書き直すと

$$\frac{3\mu}{(h_o h^*)^3} q = \frac{d}{h_o dx^*}\left(\sigma \frac{d^2 h_o h^*}{h_o{}^2 dx^{*2}} - \rho g h_o h^* \cos\theta \right) + \rho g \sin\theta + \frac{3\mu}{(h_o h^*)^2} U$$

表面張力σは定数と仮定して微分の外へ出し整理すると

$$\frac{3}{h^{*3}} = \frac{h_o \sigma}{\mu q} \frac{d}{dx^*}\left(\frac{d^2 h^*}{dx^{*2}} \right) - \frac{\rho g h_o{}^3}{\mu q} \cos\theta \frac{dh^*}{dx^*} + \frac{\rho g h_o{}^3}{\mu q} \sin\theta + \frac{3}{h^{*2}} \frac{U h_o}{q}$$

ここでCapillary数$Ca \equiv \dfrac{粘性力(\mu q / h_o)/h_o}{表面張力\sigma / h_o} = \dfrac{\mu (q / h_o)}{\sigma}$

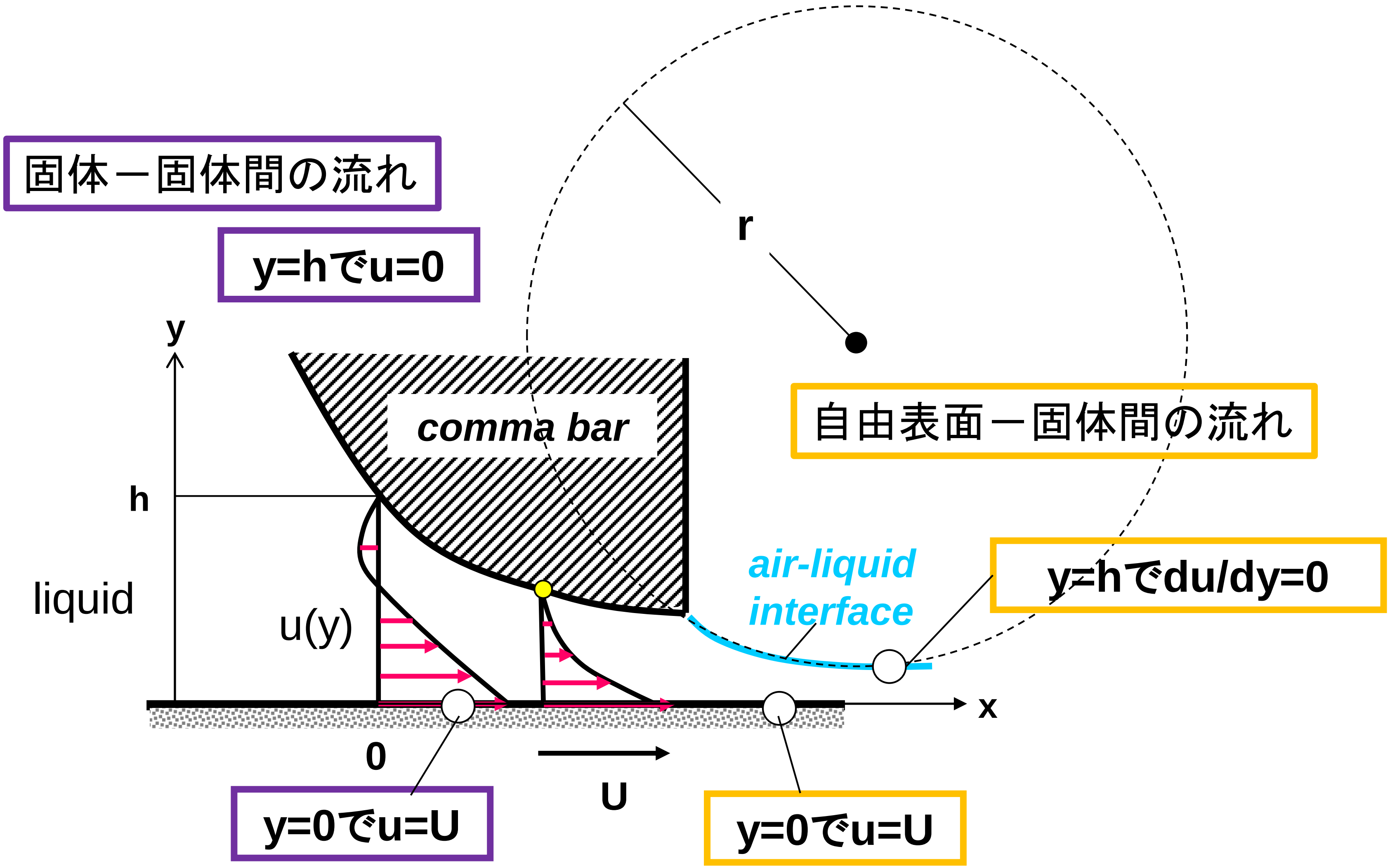
Stokes数$St \equiv \dfrac{重力 \rho g h_o}{粘性力(\mu q / h_o)/h_o} = \dfrac{\rho g h_o{}^3}{\mu q}$

と定義されるので

$$\frac{3}{h^{*3}} = \frac{1}{Ca} \frac{d}{dx^*}\left(\frac{d^2 h^*}{dx^{*2}} \right) - St \cdot \cos\theta \frac{dh^*}{dx^*} + St \cdot \sin\theta + \frac{3}{h^{*2}} \frac{U h_o}{q}$$

$$\therefore \frac{1}{Ca} \frac{d}{dx^*}\left(\frac{d^2 h^*}{dx^{*2}} \right) = -\frac{3}{h^{*2}} \frac{U h_o}{q} + St \cdot \cos\theta \frac{dh^*}{dx^*} + \frac{3}{h^{*3}} - St \cdot \sin\theta$$

境界条件のまとめ



固体－固体間の流れ
y=hでu=0
y
h
liquid
u(y)
comma bar
r
自由表面－固体間の流れ
air-liquid
interface
y=hでdu/dy=0
x
0
U
y=0でu=U
y=0でu=U

Report 4 Film Profile Equationの導出
(重力が作用する平板上の懸垂液膜)

氏名

平板上に塗布されたニュートン流体に対し右図の向きに重力が作用している。
液体の厚みは均一ではなく、x座標と時間tの関数としてh(x,t)と表される。
表面張力（気液の界面張力）をσ、液体の粘度をμ、流体の密度をρ、
重力加速度をgとし、それぞれ時間によらず一定値であると仮定する。
潤滑理論(lubrication theory)が成り立つものとして、講義資料を
参考に次のFilm Profile Equationを導け。

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{h^3}{3\mu}\frac{d}{dx}\left(\sigma\frac{d^2 h}{dx^2} + \rho g h\right)\right]$$