

工業反応装置特論

講義時間:6限

場所 :8-1A

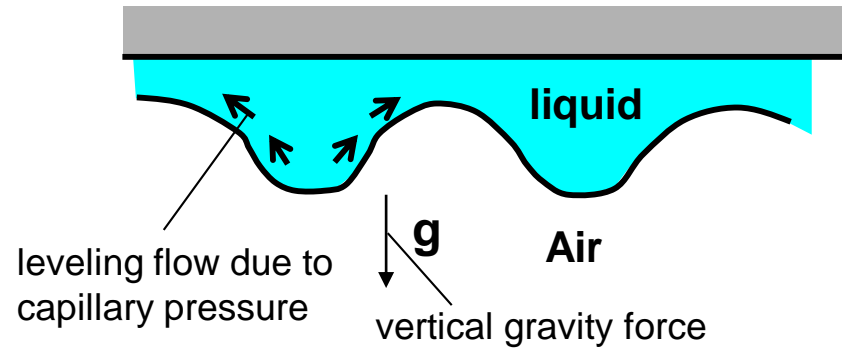
担当 :山村

1/10(水)通常通り

1/11(木)休講

1/15(月)4限 阿尻先生 特別講義(特論III対象予定)

PERIODIC SURFACE DEFORMATION

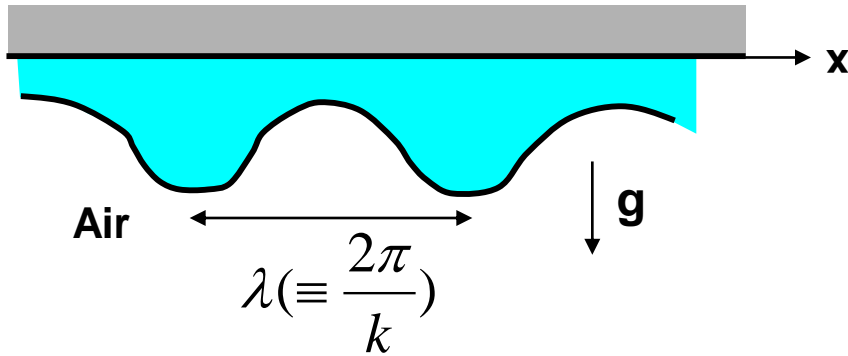


重力と表面張力のバランス → 周期的な表面形状

FPEは次式で表される (report 4)

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{h^3}{3\mu} \frac{d}{dx} \left(\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} + \rho g h \right) \right] \quad (1)$$

LINEAR STABILITY ANALYSIS (1)



線形安定性解析

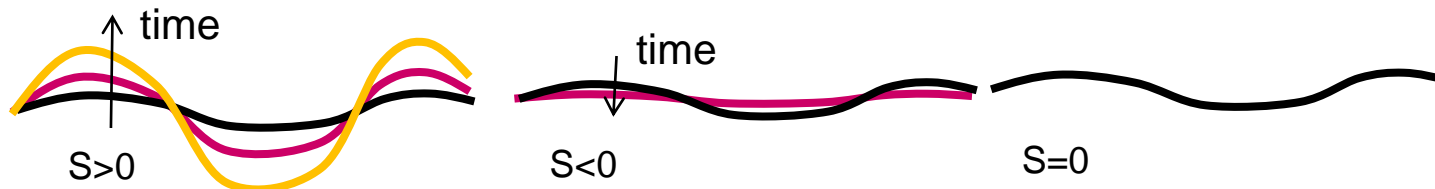
・振幅 ε_0 の微小ゆらぎを考え、ゆらぎの成長、減衰を式(2)中の記号 s の符号で判別

$$h = \bar{h} + \varepsilon(t, x)$$

平均値 変動成分

$$\varepsilon(t, x) = \varepsilon_0 \exp(st) \sin\left(\frac{x}{\lambda}\right) \quad (2) \quad \text{波長}\lambda\text{の理想的sin波}$$

$s > 0$ なら凹凸発達(不安定) $s < 0$ なら安定 $s = 0$ は中立条件



(例) $s = 0.1$, $\varepsilon_0 = 1\text{nm}$ (分子熱ゆらぎ), $x = \lambda$ のとき

$t = 100\text{s}$ 後には

$$\varepsilon(t, x) = (1 \times 10^{-9}) \exp(10) \sin(1)$$

$$= 2.2 \times 10^{-5} \text{m} = 22 \mu\text{m}$$

LINEAR STABILITY ANALYSIS (2)

粘度 μ 、表面張力 σ 、密度 ρ が座標 x や時間によらず一定なら(3)から

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{h^3}{3\mu} \frac{d}{dx} \left(\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} + \rho g h \right) \right] \\ &= -\frac{1}{3\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma h^3 \left(\frac{d^3 h}{dx^3} \right) + \rho g h^3 \frac{dh}{dx} \right] \quad (4)\end{aligned}$$

(2)を式(4)に代入することを考える。

まず時間微分は

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \varepsilon_0 s \exp(st) \sin\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

空間微分は

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \varepsilon_0 \frac{1}{\lambda} \exp(st) \cos\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -\varepsilon_0 \frac{1}{\lambda^2} \exp(st) \sin\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} = -\varepsilon_0 \frac{1}{\lambda^3} \exp(st) \cos\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

LINEAR STABILITY ANALYSIS (3)

ここで ε_0 の2乗以上の項は非常に小さいので無視すると (線形近似)

$$h^3 = \left(\bar{h} + \varepsilon_0 \exp(st) \sin\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right)^3$$
$$\sim \bar{h}^3 + 3\bar{h} \varepsilon_0 \exp(st) \sin\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

従って(4)の右辺括弧内は

$$\sigma h^3 \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 h}{dx^2} \right) + \rho g h^3 \frac{dh}{dx}$$
$$= \sigma \left\{ \bar{h}^3 + 3\bar{h} \varepsilon_0 \exp(st) \sin\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right\} \left\{ -\varepsilon_0 \frac{1}{\lambda^3} \exp(st) \cos\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right\}$$
$$+ \rho g \left\{ \bar{h}^3 + 3\bar{h} \varepsilon_0 \exp(st) \sin\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right\} \left\{ \varepsilon_0 \frac{1}{\lambda} \exp(st) \cos\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right\}$$
$$= \sigma \bar{h}^3 \left\{ -\varepsilon_0 \frac{1}{\lambda^3} \exp(st) \cos\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right\} \quad (\because \varepsilon_0^2 \approx 0)$$
$$+ \rho g \bar{h}^3 \left\{ \varepsilon_0 \frac{1}{\lambda} \exp(st) \cos\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right\}$$
$$= \bar{h}^3 \left(-\frac{\sigma}{\lambda^2} + \rho g \right) \frac{1}{\lambda} \varepsilon_0 \exp(st) \cos\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

LINEAR STABILITY ANALYSIS (4)

(4)に代入すると

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 s \exp(st) \sin\left(\frac{x}{\lambda}\right) &= -\frac{1}{3\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[\bar{h}^3 \left(-\frac{\sigma}{\lambda^2} + \rho g \right) \frac{1}{\lambda} \varepsilon_0 \exp(st) \cos\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right] \\ &= -\frac{1}{3\mu} \bar{h}^3 \left(-\frac{\sigma}{\lambda^2} + \rho g \right) \frac{1}{\lambda} \varepsilon_0 \exp(st) \frac{\partial}{\partial x} \left[\cos\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right] \\ &= -\frac{1}{3\mu} \bar{h}^3 \left(-\frac{\sigma}{\lambda^2} + \rho g \right) \frac{1}{\lambda} \varepsilon_0 \exp(st) \cdot \frac{1}{\lambda} \left(-\sin\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right)\end{aligned}$$

整理すれば

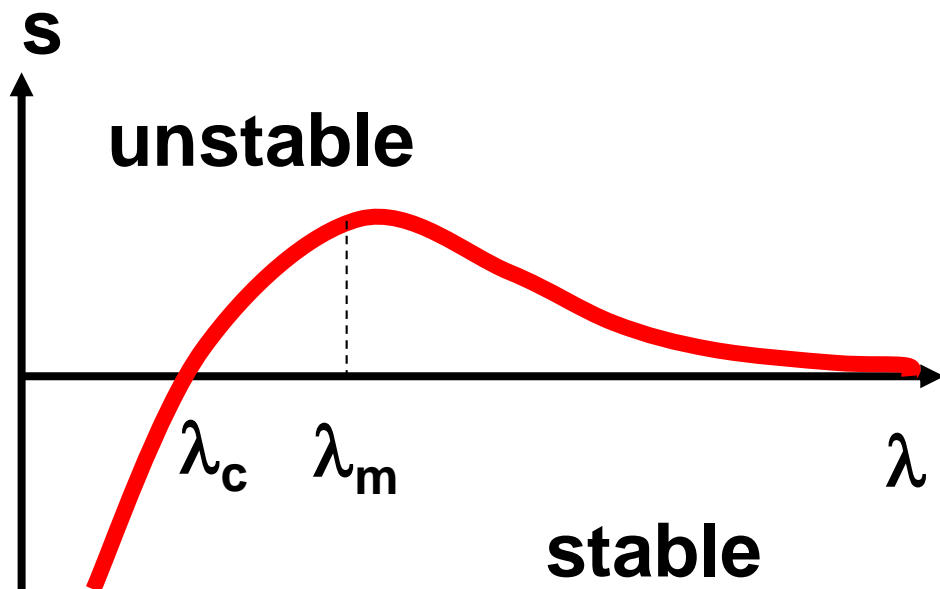
$$s = \frac{1}{3\mu} \bar{h}^3 \left(-\frac{\sigma}{\lambda^2} + \rho g \right) \frac{1}{\lambda^2} \quad (5)$$

安定である条件は $s < 0$ から

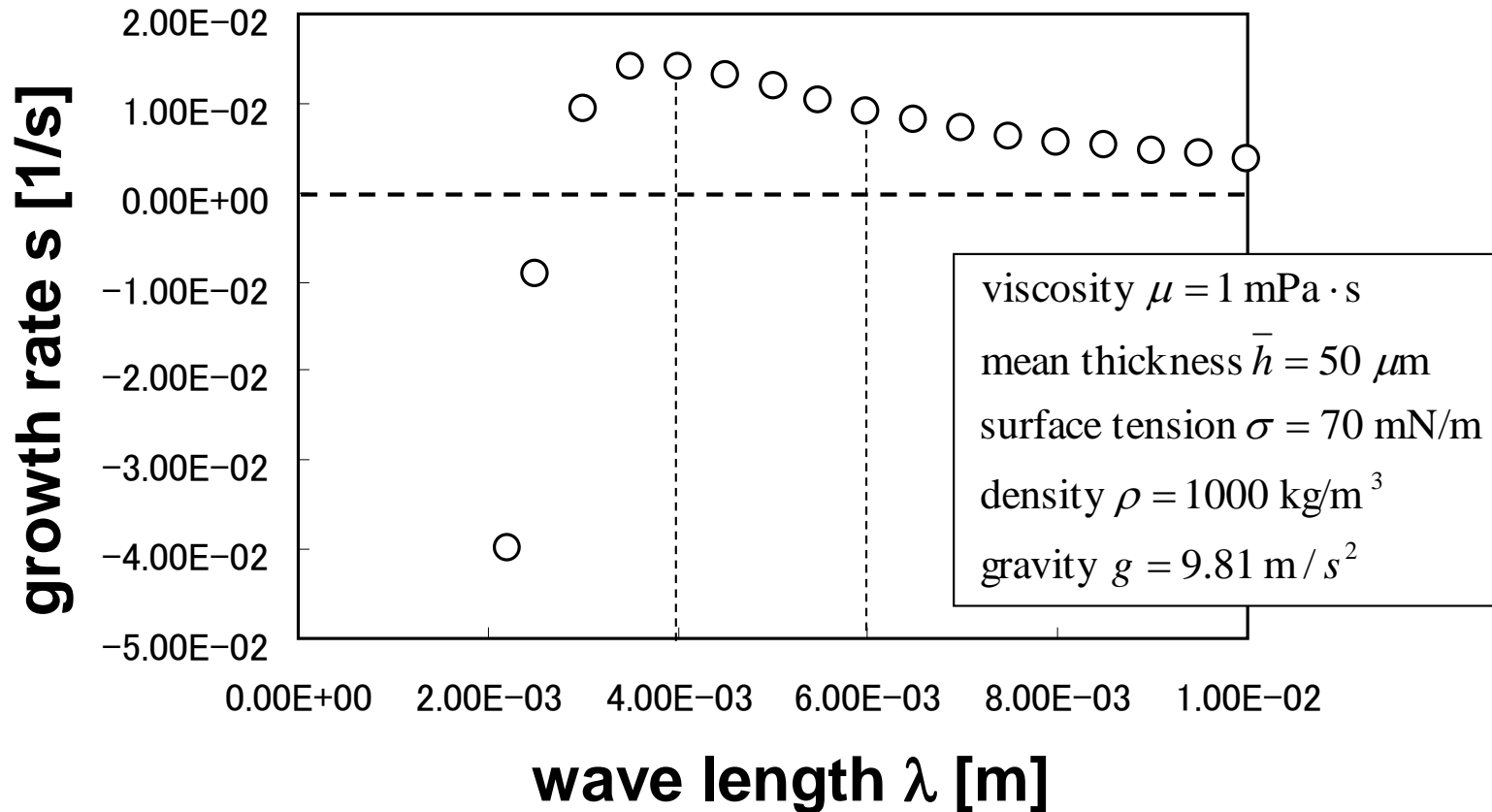
$$-\frac{\sigma}{\lambda^2} + \rho g < 0$$

$$\therefore \lambda < \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \quad (\equiv \lambda_c)$$

単位チェック



LINEAR STABILITY ANALYSIS (5)



$\lambda=2\text{mm}$ (凹凸は減衰: 安定)

$\lambda=4\text{mm}$ (凹凸が最も速く成長: 不安定)

$\lambda=6\text{mm}$ (凹凸は成長: 不安定)

LINEAR STABILITY ANALYSIS (6)

$\lambda = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$ ($\equiv \lambda_c$) のとき、振幅 ε_0 の変動は減衰も増幅もしない (中立条件)

s が最大値となる波長 λ_m は

$$\begin{aligned}\frac{ds}{d\lambda} &= \frac{1}{3\mu} \bar{h}^3 \frac{d}{d\lambda} \left\{ \left(-\frac{\sigma}{\lambda^2} + \rho g \right) \frac{1}{\lambda^2} \right\} \\ &= \frac{1}{3\mu} \bar{h}^3 \left\{ \frac{2\sigma}{\lambda^3} \frac{1}{\lambda^2} + \left(-\frac{\sigma}{\lambda^2} + \rho g \right) \left(-\frac{2}{\lambda^3} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{3\mu} \bar{h}^3 \frac{2}{\lambda^3} \left\{ \frac{2\sigma}{\lambda^2} - \rho g \right\} = 0 \text{ の解だから}\end{aligned}$$

$$\frac{2\sigma}{\lambda_m^2} - \rho g = 0$$

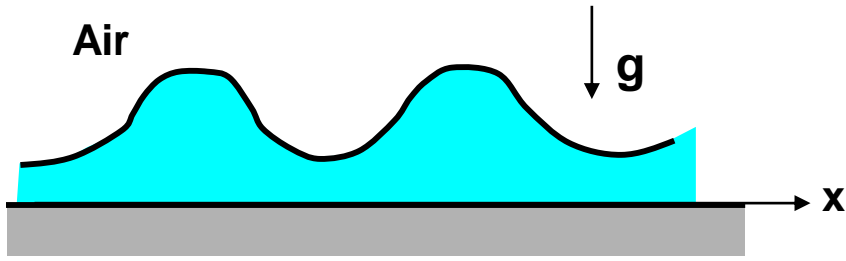
$$\lambda_m = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g}} (= 2\lambda_c)$$

最大成長波長 λ_m における成長速度 s_m は

$$s_m = \frac{(\rho g)^2}{12\mu\sigma} \bar{h}^3$$

LINEAR STABILITY ANALYSIS (7) -leveling

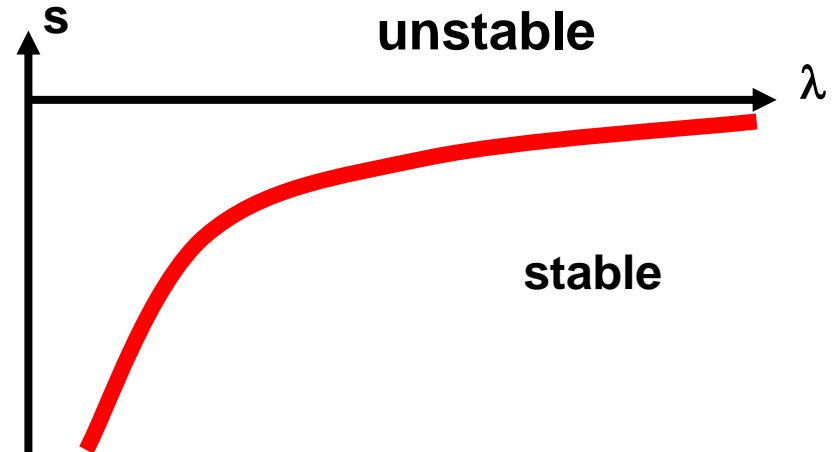
重量の方向を180° 変更した場合



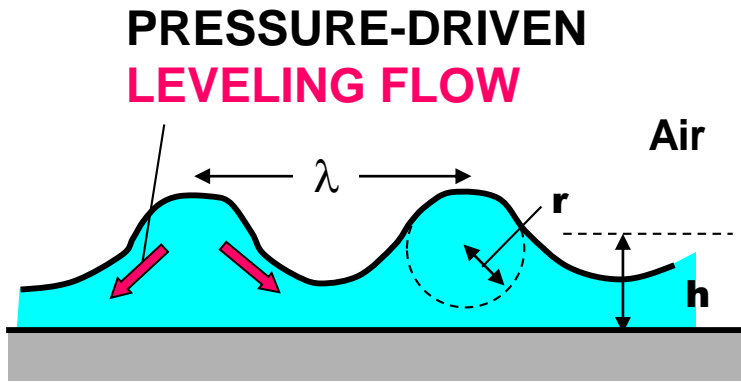
(5)の重力項の符号を変更すればよいから

$$s = \frac{1}{3\mu} \bar{h}^3 \left(-\frac{\sigma}{\lambda^2} - \rho g \right) \frac{1}{\lambda^2}$$

全ての λ に対して $s < 0$ なので安定



LINEAR STABILITY ANALYSIS (8)



重力が無視できるとき

$$s = -\frac{\sigma \bar{h}^3}{3\mu\lambda^4}$$

膜厚の時間変化は

$$h = \bar{h} + \varepsilon_0 \exp\left(-\frac{\sigma \bar{h}^3}{3\mu\lambda^4} t\right) \sin\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\therefore \frac{h - \bar{h}}{\varepsilon_0} = \exp(t/\tau) \sin\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

従ってある座標 x でのゆらぎ $(h - \bar{h}) / \varepsilon_0$ が減衰
(毛管力によるレベリング) して

表面が平坦になるのに必要な時間 τ は

$$\tau \equiv \frac{3\mu\lambda^4}{\sigma \bar{h}^3}$$

つまりより速やかに平滑化 (τ を短く) するには

$\tau \propto 1/\bar{h}^3$ 厚膜が望ましい

$\tau \propto 1/\sigma$ 高い表面張力が望ましい

$\tau \propto \mu$ 低い液粘度が望ましい

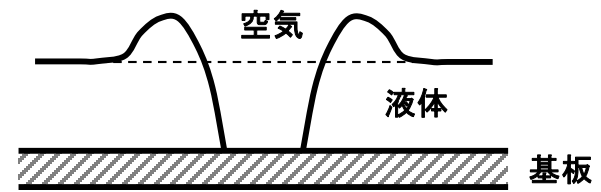
$\tau \propto \lambda^4$ 短いゆらぎ波長が望ましい

For faster leveling, we need

- **thicker films**
- **higher surface tension**
- **less viscous**
- **smaller initial wavelength**

非常に薄い液体フィルム表面と基板との間にconjoining forceと呼ばれる分子間力 A/h^3 (ただしハマーカ一定数 $A>0$ なら引力)が作用すると、フィルムは自発的に破壊する(これをde-wettingと呼ぶ)。次の手順で線形安定性解析を行い、破壊が生じる臨界条件を求めよ。ただし表面張力 σ 、粘度 μ などの物性値は一定と仮定し、重力は無視する。

[問1] 分子間力を考慮したfilm profile equationは式(1)で与えられる。これを物質収支式(2)に代入することで式(3)を導け。



$$\frac{3\mu}{h^3} q = \frac{d}{dx} \left(\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} - \frac{A}{h^3} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{3\mu} \left(\sigma h^3 \frac{d^3 h}{dx^3} \right) + \frac{A}{\mu} \frac{1}{h} \frac{dh}{dx} \right] \quad (3)$$

[問2] 波長 λ のsin波で表されるような振幅 ε_0 の微小ゆらぎを考えるとフィルム厚みは式(4)で表される。

$$h = \bar{h} + \varepsilon_0 \exp(st) \sin\left(\frac{x}{\lambda}\right) \quad (4)$$

式(3)に式(4)を代入し整理するとゆらぎの成長速度 $s(1/s)$ は次式のように書けることを示せ。ただし振幅 ε_0 は非常に小さいので必要に応じて $\varepsilon_0^2 \approx 0$, $\bar{h} \gg \varepsilon_0$ と近似してよい。

$$s = -\frac{\sigma \bar{h}^3}{3\mu \lambda^4} + \frac{A}{\mu} \frac{1}{\bar{h} \lambda^2} \quad (5)$$

[問3] $s=0$ となるような波長 λ_c (中立条件)および s が極大値を示すような波長 λ_m を表す式を導け。