工業反応装置特論

講義時間：水曜/木曜6限
場所　　：8-1A
担当　　：山村

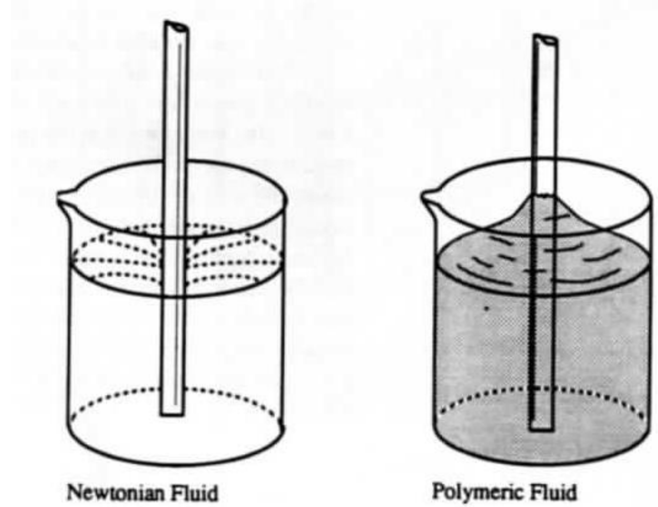
非ニュートン流体 (non-Newtonian fluids)

- 純粘性流体
  - 擬塑性流体 … せん断により粘度低下
  - ダイラタント流体 … せん断により粘度増加
- 粘塑性 … マヨネーズ（ある降伏応力以上で流動）
- **粘弾性** … 高分子溶融体・溶液
- 時間依存性

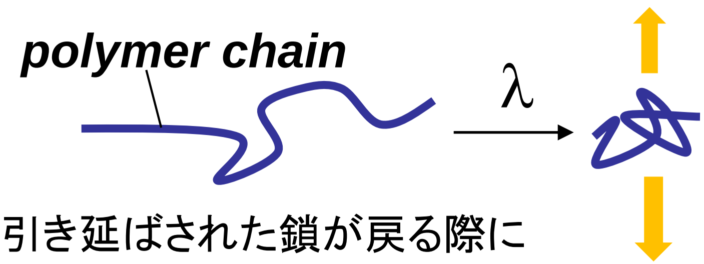
ワイゼンベルグ効果

回転する棒に沿って液体が持ち上がる

(ex. Polyisobutylene in oil)



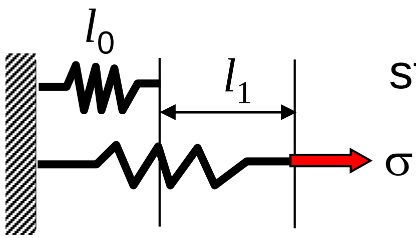
R. Larson, The structure and rheology of complex fluids, Oxford (1999)



引き延ばされた鎖が戻る際に
法線応力が生まれるため

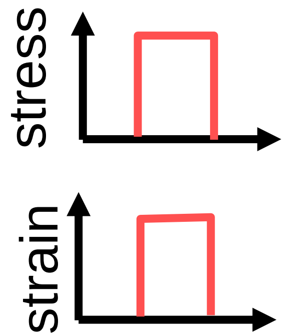
VISCO-ELASTIC MODEL

Hookean spring

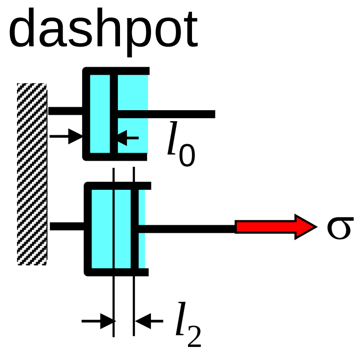


strain

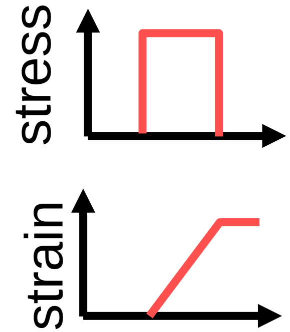
$$\gamma_1 \equiv \frac{l_1}{l_0}$$



dashpot



$$\gamma_2 \equiv \frac{l_2}{l_0}$$



$$\sigma = G\gamma_1 \qquad (1)$$

stress

弾性率

バネの歪み(strain)

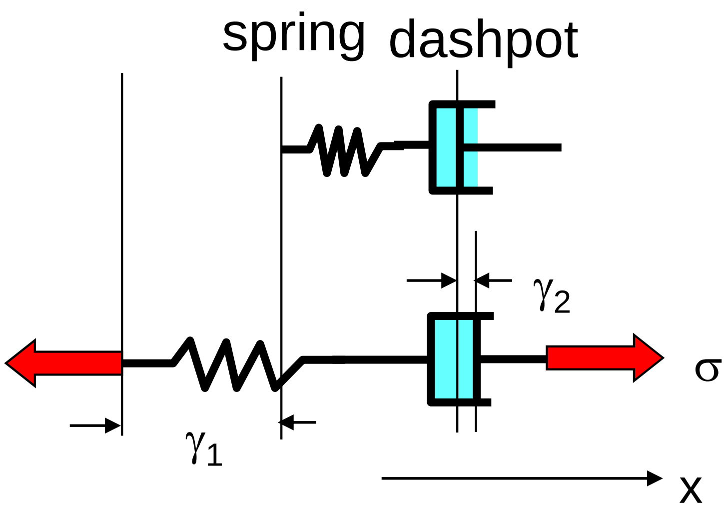
$$\sigma = \mu \frac{d\gamma_2}{dt} \qquad (2)$$

dashpot内
液体粘度

dashpotのひずみ速度

1D MAXELL MODEL (1)

Springとdashpotが直列に連結されたモデル(1D マクセルモデル）を考える



全体の歪みは$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ (3)

微分すると

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma_1}{dt} + \frac{d\gamma_2}{dt}$$

(1)(2)を代入すると構成方程式は

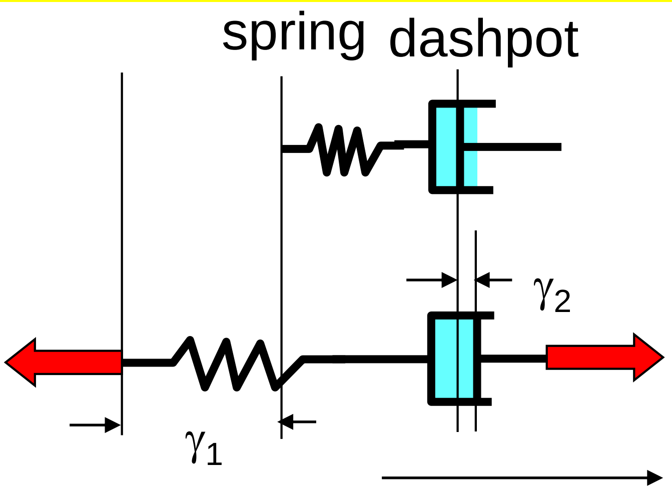
$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{G}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\mu} \quad (4)$$

整理すると

$$\sigma + \frac{\mu}{G}\frac{d\sigma}{dt} = \mu\frac{d\gamma}{dt} \quad (5)$$

MAXELL MODEL

1D MAXELL MODEL (2)



$t=0$で$\gamma=\gamma_0$(一定) のひずみを作用させた場合を考えると(5)式から

$$\sigma+\frac{\mu}{G}\frac{d\sigma}{dt}=0$$

$$\frac{d\sigma}{dt}=-\frac{G}{\mu}\sigma$$

$t=0$で$\sigma=\sigma_0$とおけば

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma}\frac{1}{\sigma}d\sigma=-\frac{G}{\mu}\int_0^t dt$$

$$\ln\frac{\sigma}{\sigma_0}=-\frac{G}{\mu}t$$

μ/Gが時間の単位を持つことに注意して

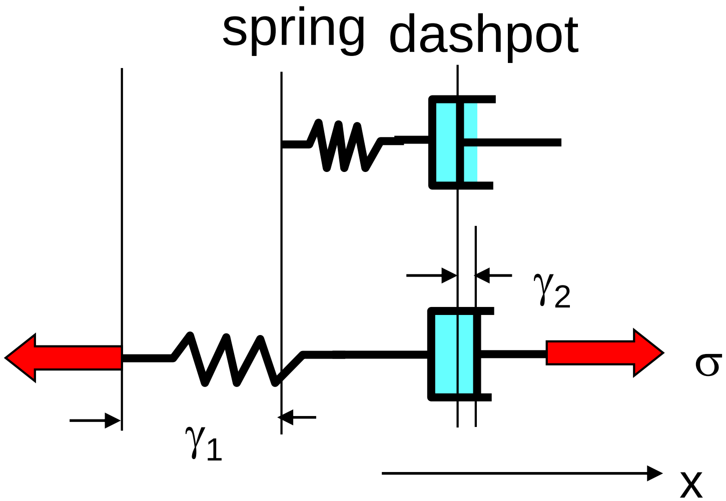
緩和時間$\lambda\equiv\mu/G$で書き直せば

$$\sigma=\sigma_0\exp(-\frac{t}{\lambda})\quad(6)$$

$t<<\lambda$なら$\sigma\cong\sigma_0$(一定) で弾性体の挙動を示す

$t>>\lambda$なら$\sigma\cong 0$で粘性体の挙動を示す

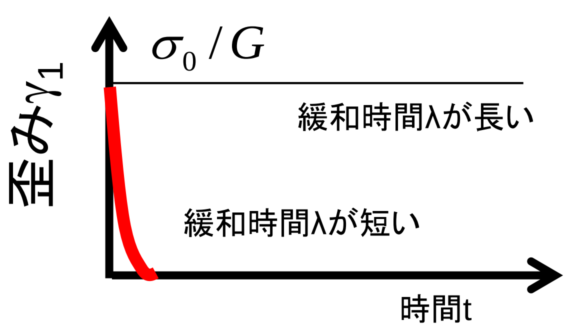
1D MAXELL MODEL (3)



(6)を(1)に代入すれば

$$\sigma_0 \exp(-\frac{t}{\lambda}) = G\gamma_1$$

$$\therefore \gamma_1 = \frac{\sigma_0}{G} \exp(-\frac{t}{\lambda})$$



(6)を(2)に代入すれば

$$\sigma_0 \exp(-\frac{t}{\lambda}) = \mu \frac{d\gamma_2}{dt}$$

$$\frac{d\gamma_2}{dt} = \frac{\sigma_0}{\mu} \exp(-\frac{t}{\lambda})$$

$t = 0$で$\gamma_2 = 0$として積分すれば

$$\int_0^{\gamma_2} d\gamma_2 = \frac{\sigma_0}{\mu} \int_0^t \exp(-\frac{t}{\lambda}) dt$$

$$\therefore \gamma_2 = \frac{\sigma_0}{\mu}(-\lambda)\left\{\exp(-\frac{t}{\lambda}) - 1\right\}$$

$$= \frac{\sigma_0}{\mu}\left(-\frac{\mu}{G}\right)\left\{\exp(-\frac{t}{\lambda}) - 1\right\} \quad \Theta\ \lambda \equiv \frac{\mu}{G}$$

$$= -\frac{\sigma_0}{G}\left\{\exp(-\frac{t}{\lambda}) - 1\right\}$$

チェック

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\sigma_0}{G}\exp(-\frac{t}{\lambda}) - \frac{\sigma_0}{G}\left\{\exp(-\frac{t}{\lambda}) - 1\right\} = \frac{\sigma_0}{G}(\text{一定})$$

理想弾性体—歪み変動を印可した場合—

歪みγを周波数ωで周期変動させた場合

$$\gamma = \gamma_0 \sin \omega t \quad (1)$$

$Hookean-spring$からなる理想弾性体なら

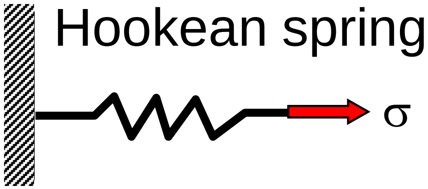
構成方程式は

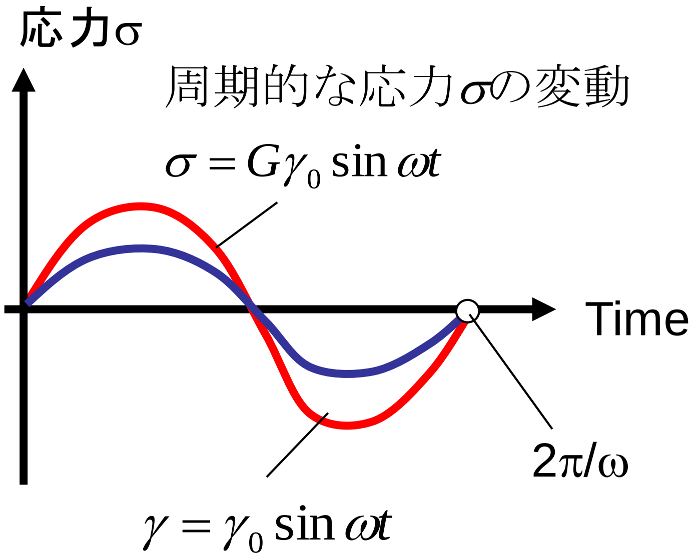
$$\sigma = G\gamma \quad (2)$$

(1)を(2)に代入すると

$$\sigma = G\gamma_0 \sin \omega t \quad (3)$$

応力の振幅は$G\gamma_0$で、位相は変わらない

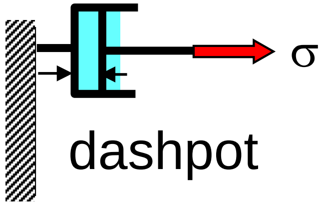




完全粘性体—歪み変動を印可した場合—

周期的に歪みγを変動させた場合

$$\gamma = \gamma_0 \sin \omega t \quad (1)$$



粘度μの粘性体（*Newton*流体）なら

構成方程式は

$$\sigma = \mu \frac{d\gamma}{dt} \quad (4)$$

(1)を(4)に代入すると

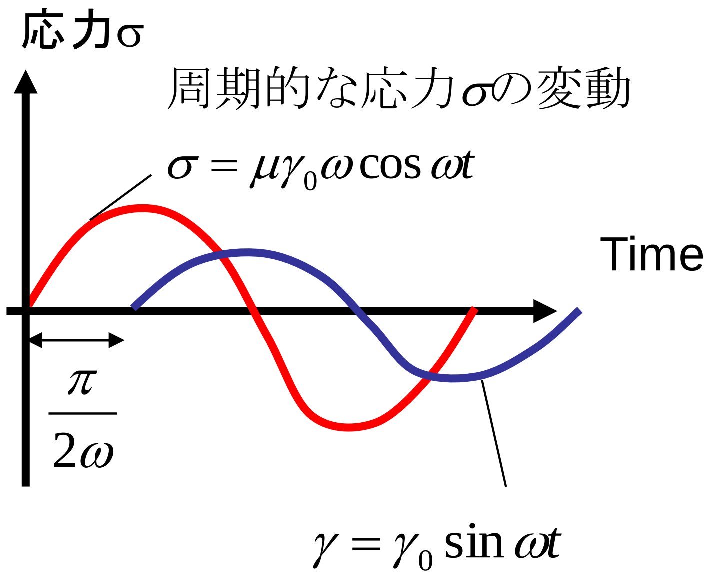
$$\sigma = \mu \gamma_0 \omega \cos \omega t \quad (5)$$

(5)を変形すれば

$$\sigma = \mu \gamma_0 \omega \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad (6)$$

$$\Theta \ \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \sin \omega t \cos \frac{\pi}{2} + \cos \omega t \sin \frac{\pi}{2} = \cos \omega t$$

(6)より応力の振幅は$\mu \gamma_0 \omega$で、位相は$\dfrac{\pi}{2\omega}$だけ変化



（参考）理想弾性体ー応力変動を印可した場合ー

周期的に応力σを変動させた場合

$\sigma = \sigma_0 \sin \omega t \quad (7)$

$Hookean - spring$からなる理想弾性体なら

構成方程式は

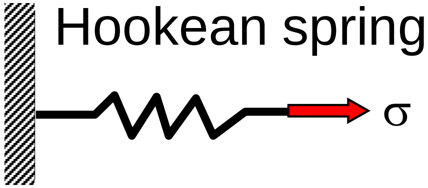
$\sigma = G\gamma \quad (2)$

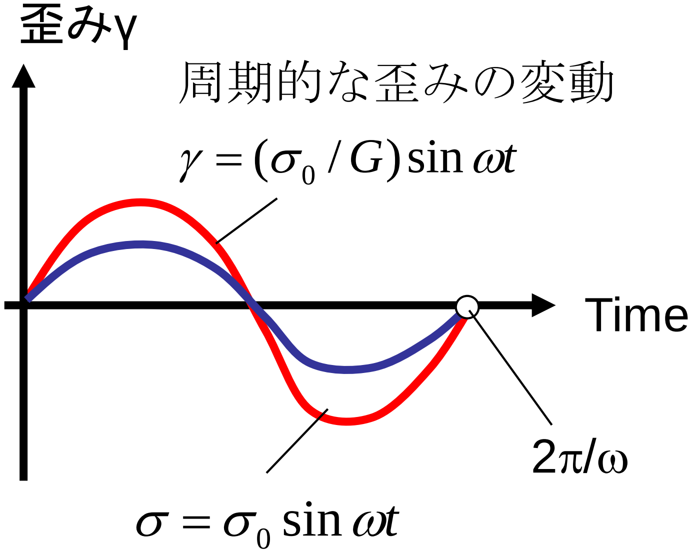
(7)を(2)に代入すると

$\sigma_0 \sin \omega t = G\gamma$

$\therefore \gamma = (\sigma_0 / G) \sin \omega t \quad (8)$

歪みの振幅はσ_0 / Gで位相は変わらない





粘弾性流体の貯蔵/損失弾性率

完全弾性体と完全粘性体の中間的な性質を示す流体を考える。

位相差を$\delta(0 \le \delta \le \pi/2)$とおくと周期的な歪み$\gamma = \gamma_0 \sin\omega t$に対する応力の応答は

$\sigma = \sigma_0 \sin(\omega t + \delta)$　(9)

展開すれば

$\sigma = (\sigma_0 \cos\delta)\sin\omega t + (\sigma_0 \sin\delta)\cos\omega t$　(10)

理想弾性体なら第１項のみで（式3)、完全粘性体なら第２項のみで（式5)

それぞれ表されることに注意して

弾性に対応する比例係数$\sigma_0 \cos\delta \equiv$貯蔵弾性率$G'$（ジープライム）$\times$初期歪み$\gamma_0$

粘性に対応する比例係数$\sigma_0 \sin\delta \equiv$損失弾性率$G''$（ジーダブルプライム）$\times$初期歪み$\gamma_0$

とおけば、式(10)から

$$G' = \frac{\sigma_0}{\gamma_0}\cos\delta \quad (11)$$

$$G'' = \frac{\sigma_0}{\gamma_0}\sin\delta \quad (12)$$

従ってσ_0とγ_0を与えて位相差δを測定すればG'、G''が測定できる

複素弾性率(1)

実数歪み$\gamma = \gamma_0 \sin \omega t$を次のような複素数に拡張する

$$\gamma^* = \gamma_0 e^{i\omega t} \quad (13)$$

オイラーの定理から$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$なので

$$\gamma^* = \gamma_0 \cos \omega t + i \gamma_0 \sin \omega t$$

従ってγ^*の虚数部は$\mathrm{Im}[\gamma^*] = \gamma_0 \sin \omega t$と書け実数歪みに対応する。

同様に、位相差δを持つ複素数の応力を考えると

$$\sigma^* = \sigma_0 e^{i(\omega t + \delta)} \quad (14)$$

これらを用いて複素弾性率G^*を次式で定義する

$$G^* \equiv \sigma^* / \gamma^* \quad (15)$$

(13)(14)より

$$G^* = \frac{\sigma_0 e^{i\omega t} e^{i\delta}}{\gamma_0 e^{i\omega t}} = \frac{\sigma_0}{\gamma_0} e^{i\delta} = \frac{\sigma_0}{\gamma_0} \cos\delta + i \frac{\sigma_0}{\gamma_0} \sin\delta \quad (16)$$

複素弾性率(2)

(16)よりG^*の実数部と虚数部を取るとそれぞれ

$$\mathrm{Re}[G^*]=\frac{\sigma_0}{\gamma_0}\cos\delta$$

$$\mathrm{Im}[G^*]=\frac{\sigma_0}{\gamma_0}\sin\delta$$

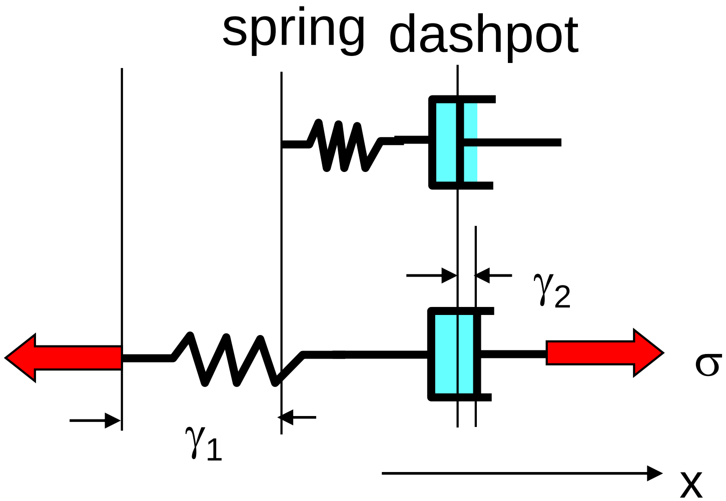
(11)(12)と比較すれば

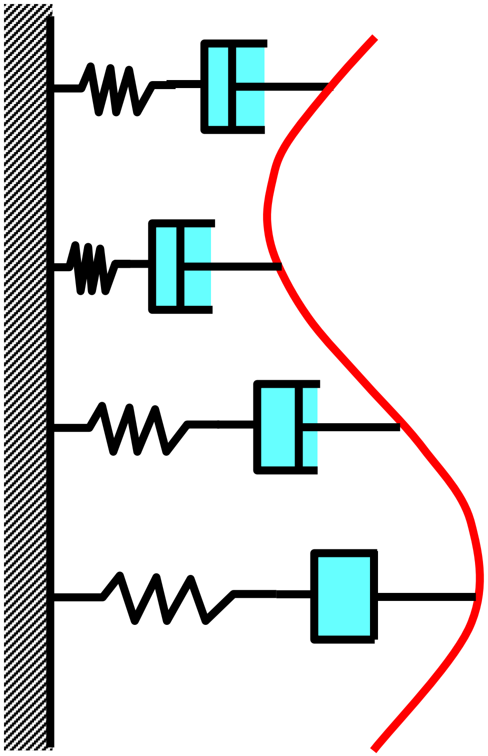
$$G'=\mathrm{Re}[G^*],$$

$$G''=\mathrm{Im}[G^*]$$

従って複素弾性率を計算しその実数、虚数部をとればG'、G''が得られる。

1D MAXELL MODELの場合 (1)





周期的に応力σを変動させた場合

$$\sigma^* = \sigma_0 e^{i(\omega t+\delta)} \qquad (14)$$

構成方程式としてマクセルモデルを用いると

$$\mu \frac{d\gamma^*}{dt} = \sigma^* + \frac{\mu}{G}\frac{d\sigma^*}{dt} \qquad (15)$$

(14)を(15)に代入すると

$$\frac{d\gamma^*}{dt} = \frac{1}{\mu}\sigma_0 e^{i(\omega t+\delta)} + \frac{1}{G}(i\omega)\sigma_0 e^{i(\omega t+\delta)} = \frac{\sigma_0}{G}(i\omega + \frac{G}{\mu})e^{i(\omega t+\delta)}$$

1D MAXELL MODELの場合 (2)

積分すると

$$\gamma^* = \frac{\sigma_0}{G}(i\omega + \frac{G}{\mu})\frac{1}{i\omega}e^{i(\omega t+\delta)} + C$$

$$= \frac{\sigma_0}{G}(1 + \frac{G}{i\omega\mu})e^{i(\omega t+\delta)} + C$$

$$= \frac{\sigma_0}{G}(1 + \frac{Gi}{i^2\omega\mu})e^{i(\omega t+\delta)} + C$$

$$= \frac{\sigma_0}{G}(1 - i\frac{G}{\omega\mu})e^{i(\omega t+\delta)} + C$$

簡単のためひずみが$\dfrac{\sigma_0}{G}(1-i\dfrac{G}{\omega\mu})$のときを$t=0$とおけば

$C=0$なので

$$\gamma^* = \frac{\sigma_0}{G}(1-i\frac{G}{\omega\mu})e^{i(\omega t+\delta)} = \frac{1}{G}(1-i\frac{G}{\omega\mu})\sigma^*$$

緩和時間の定義$\lambda \equiv \mu / G$から

$$\gamma^* = \frac{1}{G}(1-\frac{i}{\omega\lambda})\sigma^* \qquad (16)$$

1D MAXELL MODELの場合 (3)

(16)から複素弾性率を$G^* \equiv \sigma^* / \gamma^*$は

$$G^* = \frac{G}{1 - \dfrac{i}{\omega\lambda}}$$

$$= \frac{G\left(1 + \dfrac{i}{\omega\lambda}\right)}{\left(1 - \dfrac{i}{\omega\lambda}\right)\left(1 + \dfrac{i}{\omega\lambda}\right)}$$

$$= \frac{G\left(1 + \dfrac{i}{\omega\lambda}\right)}{1 - i^2\left(\dfrac{1}{\omega\lambda}\right)^2}$$

$$= \frac{G\left(1 + \dfrac{i}{\omega\lambda}\right)}{1 + \left(\dfrac{1}{\omega\lambda}\right)^2}$$

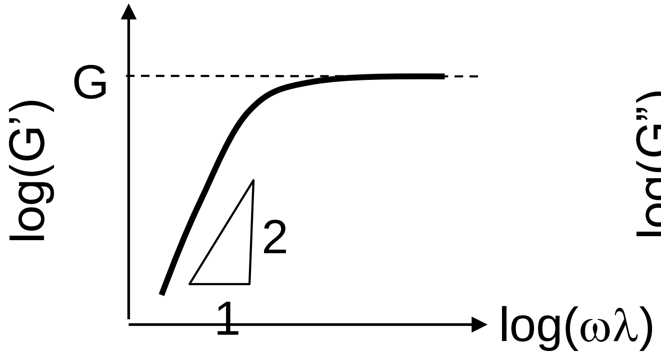
$$\therefore G^* = \frac{G}{1 + \left(\dfrac{1}{\omega\lambda}\right)^2} + i\frac{\dfrac{G}{\omega\lambda}}{1 + \left(\dfrac{1}{\omega\lambda}\right)^2}$$

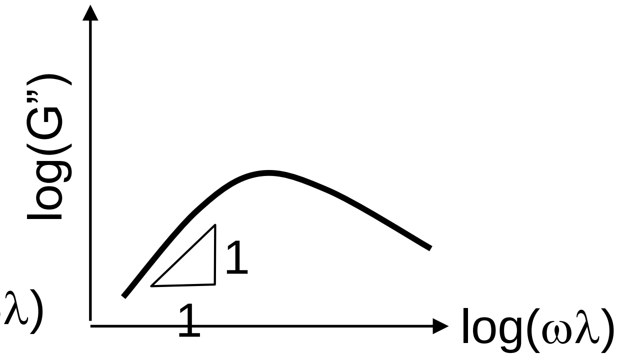
実数部をG'(貯蔵弾性率)

虚数部をG''(損失弾性率)　と定義すれば

$$G' = \frac{G}{1 + \left(\dfrac{1}{\omega\lambda}\right)^2} = \frac{G(\omega\lambda)^2}{1 + (\omega\lambda)^2}$$

$$G'' = \frac{\dfrac{G}{\omega\lambda}}{1 + \left(\dfrac{1}{\omega\lambda}\right)^2} = \frac{G\omega\lambda}{1 + (\omega\lambda)^2}$$



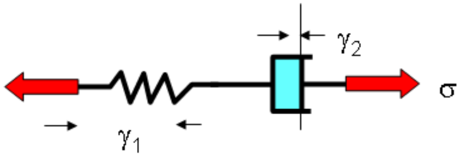


Report 6 粘弾性流体の基本モデル(Maxell model) 氏名

右図のように弾性バネと粘性ダッシュポットが直列に組み合わされたMaxell モデルを考える。
全体のひずみをγ、バネとダッシュポットに作用する歪をそれぞれγ_1, γ_2として次の問いに答えよ。

[問1] 直列なのでバネとダッシュポットには等しい応力σが作用しており、各要素について次の関係が成り立つ。

$$\sigma = G\gamma_1, \quad \sigma = \mu \frac{d\gamma_2}{dt}$$



全体に作用する歪γはこれらの和であることから次の構成方程式を導け。

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{G}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\mu} \quad (1)$$

[問2] 次のように周期的に変動する応力を考える。

$$\sigma = \sigma_0 e^{i\omega t} (= \sigma_0 \sin \omega t + i\sigma_0 \cos \omega t) \quad (2)$$

式(2)を式(1)に代入すると複素弾性率G*に対する式(3)が得られることを示せ。ただし緩和時間$\lambda=\mu/G$である。

$$G^* \equiv \sigma/\gamma = \frac{G\left(1+\dfrac{i}{\omega\lambda}\right)}{1+\left(\dfrac{1}{\omega\lambda}\right)^2} \quad (3)$$

[問3]式(3)から貯蔵弾性率G’（実数部）、損失弾性率G”（虚数部）がそれぞれ次式で書けることを示せ。

$$G^{'} == \frac{G(\omega\lambda)^2}{1+(\omega\lambda)^2}, \quad G^{''} = \frac{G\omega\lambda}{1+(\omega\lambda)^2}$$

[問4]水中に油滴を分散させたある液体ではG=216 Pa, λ=2.7 sとなる。周期的変動の周波数ωとG’,
G”の関係を表すグラフの概形を書き、G’=G”となる（すなわち粘性支配から弾性支配へと遷移する）
臨界周波数ω_cを求めよ。